



FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE

ÚSTAV FYZIKY

Jméno a příjmení:

Šimon Svoboda

PROTOKOL O LABORATORNÍM MĚŘENÍ Z FYZIKY

Číslo a název úlohy:

4. Stanovení modulu pružnosti v tahu z prodloužení drátu

Den a čas měření:

Úterý 17:00

Vyučující:

Ing. Šimon Svoboda

Datum měření:

24. 12. 2024

Datum odevzdání:

31. 12. 2024

Klasifikace:

1 Úkoly měření

1. Stanovte modul pružnosti v tahu materiálu drátu zrcátkovou metodou včetně jeho nejistoty. Získanou hodnotu porovnejte s teoretickou hodnotou.
2. Sestrojte graf závislosti polohy světelné stopy na stupnici n_i na tíhové síle G_i zatěžující drát.

2 Definice a jednotka měřené veličiny

Modul pružnosti v tahu (Youngův modul), E , je materiálová konstanta definovaná podílem normálového napětí a příslušného poměrného prodloužení. Definice je platná v mezích platnosti úměrnosti,

$$\sigma_n = E\varepsilon, \quad (1)$$

nazývané Hookeův zákon, kde σ_n je normálové napětí a ε je poměrné (relativní) podélné prodloužení, definované jako

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad (2)$$

kde l_0 je počáteční délka [1].

Jednotkou modulu pružnosti v tahu je pascal,

$$[E] = \text{Pa}, \quad (3)$$

a rozměrem je:

$$\dim(E) = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (4)$$

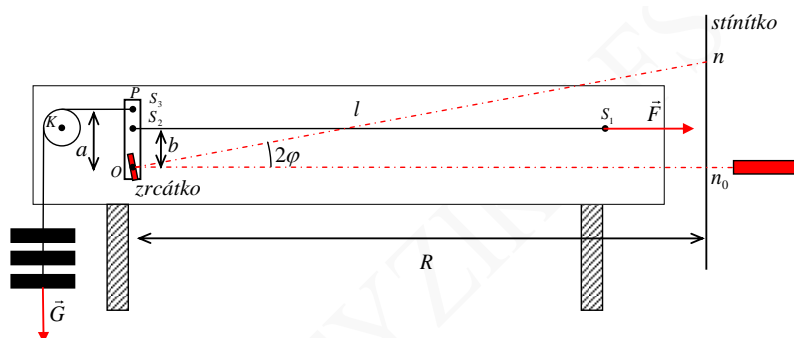
3 Princip a metoda měření

Nejjednodušším způsobem, jak změřit modul pružnosti v tahu, je vyjít přímo z Hookeova zákona (1) a upravit ho do tvaru

$$\Delta l = \frac{l_0}{SE} F, \quad (5)$$

kde S je průřez měřeného vzorku (drátu) kolmý ke směru namáhání. Postupným zatěžováním drátu silou F je možné změřit lineární závislost $\Delta l = f(F)$. Směrnice přímky lineární regrese těchto dat je rovna výrazu l_0/SE , odkud je možné modul pružnosti v tahu vyjádřit. Malé změny průřezu drátu přitom zanedbáváme. Protože je nutné provádět měření pouze v oblasti lineární deformace (relativní prodloužení maximálně 2%), je velikost prodloužení malá a špatně měřitelná.

Z těchto důvodů využíváme k měření tzv. zrcátkovou metodu využívající měřicí zařízení na obr. 1, která malé hodnoty prodloužení převádí na větší a lépe měřitelné výchylky na stínítku. Jeden konec měřeného drátu je svorkou S_1 připevněn k tuhému rámu a druhý konec drátu je svorkou S_2 připevněn k otočné páčce P ve vzdálenosti b od její osy otáčení O . Na závěsu připevněném k S_3 vedeném přes kladku je zavěšeno závaží, které silou G působí kolmo na páčku P ve vzdálenosti a od její osy otáčení.



Obr. 1: Schéma uspořádání měřicí aparatury modulu pružnosti z prodloužení drátu zrcátkovou metodou.

Při momentové rovnováze na páčce P bude platit

$$Ga = Fb, \quad (6)$$

kde F je velikost síly vyvolané působením tíhy závaží v drátu. Tato síla vyvolá prodloužení drátu $\Delta l = l - l_0$, čímž dojde také k pootočení páčky o úhel φ . Vzhledem k malým změnám délky drátu a tím i malým otočením páčky můžeme vyjádřit přibližně $\Delta l \simeq b\varphi$. Pootočí-li se páčka se zrcátkem o φ , bude dopadající a odražený paprsek spolu svírat úhel 2φ . Platí:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{n - n_0}{R} = \frac{\Delta n}{R}, \quad (7)$$

kde R je vzdálenost stínítka od zrcátka a n je hodnota odečtená na stínítku. Pro malé úhly φ je možné přibližně psát $2\varphi \simeq \operatorname{tg} 2\varphi$, tedy

$$\varphi \simeq \frac{\Delta n}{2R}. \quad (8)$$

S využitím (6) a (8) lze Hookeův zákon (5) zapsat ve tvaru

$$\Delta n = \frac{2Rl_0a}{SEb^2}G = KG. \quad (9)$$

Pomocí směrnice K regresní přímky naměřené závislosti $\Delta n = f(G)$ můžeme určit modul pružnosti v tahu jako

$$E = \frac{2Rl_0a}{Sb^2} \frac{1}{K}. \quad (10)$$

Protože měřicí zařízení je mechanismus, který má vnitřní odpory, neukáže po přidání závaží laser na stínítku výchylku tak velkou, jako kdyby aparatura žádné odpory neměla. Stejně tak,

když odebereme závaží, neklesne kvůli vnitřním odporům výchylka na tak malou hodnotu jako bez odporů. Proto provádíme měření jak při zatěžování, tak i při odlehčování, a pro každou zatěžovací sílu tyto dvě odpovídající výchylky zprůměrujeme: $\overline{\Delta n}$. Vzhledem k tomu, že ke stanovení modulu pružnosti, E , postačuje pouze směrnice regresní přímky, K , situaci si ještě zjednodušíme a vyhodnotíme pouze závislost

$$\bar{n} = n_0 + KG. \quad (11)$$

4 Seznam pomůcek

- Digitální váha
- 7× závaží o hmotnosti ~ 1 kg
- Mikrometr
- Pásové měřidlo
- Laserové ukazovátko
- Měřicí aparatura zrcátkové metody

5 Naměřené hodnoty

Před započítáním zatěžování drátu přidáváním závaží byl pětkrát změřen průměr drátu, d , vzdálenost stínítka od zrcátka, R , a počáteční délka drátu, l_0 . Tyto hodnoty jsou zapsány v tab. 1 včetně odhadů absolutních chyb měření ve stejných jednotkách.

Tab. 1: Naměřené hodnoty průměru drátu, d , vzdálenosti stínítka od zrcátka, R , a počáteční délky drátu, l_0 , včetně absolutních chyb měření ve stejných jednotkách.

Označení	číselná hodnota	jednotka	chyba měření
d	0,695; 0,700; 0,695; 0,695; 0,695	mm	0,005
R	1,820	m	0,001
l_0	0,685	m	0,001

Hodnoty rozměrů a a b měřicího zařízení byly dány v zadání úlohy jako:

$$a = (85,0 \pm 0,5) \text{ mm},$$

$$b = (45,0 \pm 0,5) \text{ mm}.$$

Dále byly změřeny hmotnosti jednotlivých závaží na digitálních vahách s absolutní chybou měření $m_m = 0,1$ g. Tab. 2 obsahuje vždy celkovou hmotnost působící na drát a přepočítanou sílu pomocí hodnoty tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Údaj $n \downarrow$ je hodnota výchylky na stínítku získaná v průběhu zatěžování a $n \uparrow$ je hodnota výchylky na stínítku získaná v průběhu odlehčování. Poslední sloupec obsahuje průměrné hodnoty (\bar{n}) z výchylek na stupnici vždy při daném konkrétním zatížení ze zatěžování a odlehčování.

Tab. 2: Závislost výchylky na stupnici na hmotnosti zatížení m při zatěžování ($n \downarrow$) a při odlehčování ($n \uparrow$). Hmotnosti jsou přepočítány na síly G využitím hodnoty tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Hodnota \bar{n} je průměr získaný z výchylek na stupnici při konkrétním zatížení ze zatěžování a odlehčování.

Č. měř.	m [g]	G [N]	$n \downarrow$ [mm]	$n \uparrow$ [mm]	\bar{n} [mm]
0	0	0	-1	0	-0,5
1	1009,9	9,907	12	14	13
2	2016,1	19,778	27	29	28
3	3020,1	29,627	41	43	42
4	4021,9	39,455	55	57	56
5	5031,9	49,360	70	71	70,5
6	6041,1	59,263	83	85	84
7	7046,0	69,121	97	98	97,5

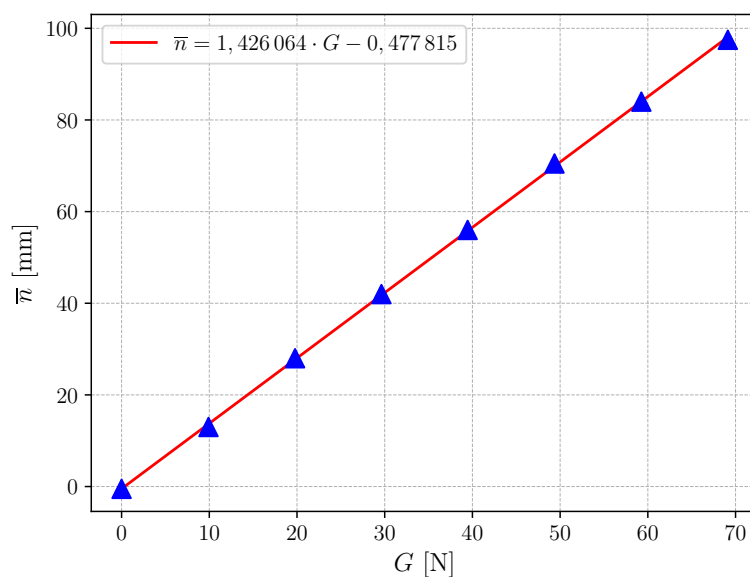
6 Výpočty

6.1 Lineární regrese

Naměřené hodnoty lineární závislosti (11), uvedené v tab. 2, jsou zakresleny v grafu na obr. 2. Parametry regresní přímky byly stanoveny jako:

$$K = (1,426\,064 \pm 0,007\,256) \text{ mm} \cdot \text{N}^{-1},$$

$$n_0 = (-0,477\,815 \pm 0,299\,721) \text{ mm}.$$



Obr. 2: Graf závislosti průměrné hodnoty odečtené na pravítku, \bar{n} , ze zatěžování ($n \downarrow$) a odlehčování ($n \uparrow$) na tíze závaží G včetně regresní přímky.

6.2 Výpočet modulu pružnosti v tahu drátu

Aritmetický průměr průměru drátu:

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{5} \cdot (0,695 + 0,700 + 0,695 + 0,695 + 0,695) \text{ mm} = 0,696 \text{ mm}.$$

Modul pružnosti v tahu:

$$E = \frac{2Rl_0a}{Sb^2} \frac{1}{K} = \frac{8Rl_0a}{\pi d^2 b^2} \frac{1}{K} = \frac{8 \cdot 1,820 \text{ m} \cdot 0,685 \text{ m} \cdot 0,0850 \text{ m}}{\pi \cdot (0,696 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot (0,0450 \text{ m})^2} \cdot \frac{1}{1,426064 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}} =$$

$$= 1,929027754 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 192,9027754 \text{ GPa}.$$

6.3 Nejistoty měření

Relativní nejistota průměru d drátu typu B:

$$u_{rdB} = \frac{m_d}{\sqrt{3} \cdot \bar{d}} = \frac{0,01 \text{ mm}}{\sqrt{3} \cdot 0,696 \text{ mm}} = 0,008295.$$

Relativní nejistota parametru b typu B:

$$u_{rbB} = \frac{u_{bB}}{b} = \frac{0,5 \text{ mm}}{45,0 \text{ mm}} = 0,011111.$$

Relativní nejistota vzdálenosti stínítka od zrcátka R typu B:

$$u_{rRB} = \frac{m_R}{\sqrt{3}R} = \frac{0,001 \text{ m}}{\sqrt{3} \cdot 1,820 \text{ m}} = 0,000317$$

Relativní nejistota délky nezatíženého drátu l_0 typu B:

$$u_{rl_0B} = \frac{m_{l_0}}{\sqrt{3}l_0} = \frac{0,001 \text{ m}}{\sqrt{3} \cdot 0,685 \text{ m}} = 0,000842$$

Relativní nejistota parametru a typu B:

$$u_{raB} = \frac{u_{aB}}{a} = \frac{0,5 \text{ mm}}{85,0 \text{ mm}} = 0,005882$$

Relativní nejistota směrnice K typu A:

$$u_{rKA} = \frac{u_{KA}}{K} = \frac{0,007256 \text{ mm} \cdot \text{N}^{-1}}{1,426064 \text{ mm} \cdot \text{N}^{-1}} = 0,005088$$

Relativní kombinovaná nejistota modulu pružnosti E :

$$u_{rE} = \sqrt{4u_{rdB}^2 + 4u_{rbB}^2 + u_{rRB}^2 + u_{rl_0B}^2 + u_{raB}^2 + u_{rKA}^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 0,008295^2 + 4 \cdot 0,011111^2 + 0,000317^2 + 0,000842^2 + 0,005882^2 + 0,005088^2} =$$

$$= 0,028816$$

Absolutní nejistota modulu pružnosti E :

$$u_E = E u_{rE} = 192,9027754 \text{ GPa} \cdot 0,028816 = 5,558686 \text{ GPa} \doteq 5,6 \text{ GPa}$$

7 Závěr

Modul pružnosti v tahu je

$$E = (192,9 \pm 5,6) \text{ GPa}.$$

Tato hodnota modulu pružnosti v tahu odpovídá hodnotám konstrukčních a nerezových ocelí, které se podle reference [2] pohybují v rozsahu (190–215) GPa.

Použitá literatura

- [1] Zdeněk Horák et al. *Fyzika: příručka pro vysoké školy technického směru*. 3. vyd. Řada teoretické literatury. Praha: SNTL, 1981 (cit. na str. 1).
- [2] Cambridge University Engineering Department. *Materials Data Book*. 2003. vyd. Data courtesy of Granta Design Ltd. Cambridge University. Cambridge, UK, 2003. URL: <https://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/cueddatabooks/materials.pdf> (cit. na str. 5).
- [3] Z. Kohout et al. *Úloha 4: Stanovení modulu pružnosti z prodloužení drátu*. Laboratorní cvičení z fyziky. ČVUT, Fakulta strojní. Praha, 2003. URL: <https://www.fs.cvut.cz/content/files/12102/ULOHY/4Yoiung.pdf>.