162 řešených příkladů (nejen) z fyziky

Pro předměty:

Fyzika I, Fyzika II, Seminární cvičení z fyziky I, Seminární cvičení z fyziky II, Praktikum z Fyziky I, Praktikum z Fyziky II, Fyzika a moderní technologie

Šimon Svoboda
simon.svoboda@fs.cvut.cz
místnost: B2-248a

(poslední aktualizace: 19. května 2026)

Fyzika je teoretická, ale zábava je skutečná.
— *Dr. Sheldon Cooper, B.S., M.S., M.A., Ph.D., Sc.D.*

Jenom několik poznámek...

V první řadě je třeba poznamenat, že tento text nemůže sloužit jako oficiální studijní materiál – neprošel korekturou a odbornou recenzí a může tak obsahovat chyby a překlepy! Prakticky jsou zde uvedena pouze stručná řešení příkladů probíraných na cvičení a stejně tak stručně teorie nejistot měření. Celý dokument je rozdělen na tři části. Dvě stěžejní, **(I) Fyzika I** a **(II) Fyzika II**, a potom **(III) Dodatky**. Teorie nejistot měření je mezi části I a II rozdělena tak, aby odpovídala matematickým znalostem studentů v prvním a druhém semestru. Dodatky snad obsahují další zajímavé informace ke zvládnutí předmětů a i něco navíc.

Text by měl být vnímán pouze jako pomůcka v případě, že se na cvičeních nestihnou probrat všechny příklady. Plnohodnotnou sbírkou příkladů, pokrývající typově všechny úlohy, které se mohou objevit u zkoušky, je skriptum [11] pro Fyziku I a [9] pro Fyziku II. Potřebné teoretické znalosti získáte ze skript [5] a [4] a speciálně o chybách a nejistotách měření pak pojednávají skripta laboratorních cvičení [6]. Tato skripta využívejte pouze ke studiu teorie chyb a nejistot měření – laboratorní úlohy jsou aktuální na webu ústavu –. Kromě příkladových skript můžete také sáhnout po sbírkách příkladů [12] a [10] našich autorů vydaných nakladatelstvím Academia. Dobrým zdrojem příkladů je rovněž web Katedry didaktiky fyziky MFF [3].

Každá kapitola obsahuje několik typických („rutinních“) příkladů a na závěr jeden či více příkladů nějakým způsobem méně obvyklých nebo jinak zajímavých (vhodných zejména pro semináře). První typ příkladů je označen ♣ a druhý ★. Třetím typem příkladu je příklad „výkladový“ zakomponovaný přímo do výkladu a je označený ♦.

Dokument je uzpůsoben oboustrannému tisku.

Velkou zásluhu na vzniku tohoto textu mají RNDr. Zuzana Budinská, Ph.D., která zpracovala teorii v kapitole 2, Mgr. Petr Ducháček, který na ni navázal v kapitole 12 a Ing. Tomáš Horažďovský, jehož poznámky z hodin ho velmi zkvalitnily v řešených příkladech.

Za nalezení chyb(y) je možné získat bonusové body k zápočtové písemce. ☺

Aktualizace

1. Od akademického roku 2024/2025 jsou kapitoly 10 Elektrostatické pole a 11 Elektrický proud přesunuty do Fyziky II kvůli změně hodinové dotace Fyziky I z původní 4P+2(C/L) na 3P+2C+1L.

Obsah

1 Prolog (než začneme počítat)

1.1 Typografická pravidla

V odborných textech dodržujeme typografická pravidla zápisu matematických výrazů, abychom zajistili čitelnost a jednoznačnost. Československý časopis pro fyziku [2] je v instrukcích pro autory shrnuje v 10 bodech, které zde v modifikované podobě uvedeme[1]:

- Veškeré proměnné se píší šikmým řezem písma (italikou), např. poloměr r, plocha S, atd. Totéž platí pro řecká písmena, např. frekvence $\mathit{\Omega}$ a také pro indexy, je-li v indexu proměnná, např. i-tá složka vektoru rychlosti v_i.
- Funkce píšeme základním řezem písma, např. sin, exp, ln, max, min, sup, inf, atd.
- Zkratky píšeme základním řezem písma, zpravidla jako dolní index, např. hmotnost Země M_{Z}, Boltzmannova konstanta k_{B}, maximální hodnota proměnné x: $x_{\max}$, atd.
- Základním řezem písma se píší všechna čísla, např. 73, $2x$, x^2, x_2, atd.
- Označení prvků, částic, atd. píšeme základním řezem písma, např. He, $\mathrm{H_2}$, p, n, e^-.
- Pomocné symboly (,), [,], {, }, $\langle$, $\rangle$, $<$, $>$, /, atd. také píšeme základním řezem písma.
- Základním řezem písma píšeme jednotky, přičemž mezi číslem a jednotkou je mezera, např. $T = 22\,^\circ\mathrm{C}$, $V = 16\,\mathrm{m}^3$, atd. U složených jednotek se píše mezera, např. $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, nebo tečka: $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Budeme se raději držet druhé možnosti, neboť vylučuje nedorozumění ve smyslu např. „milisekunda“ (ms) vs. „metr krát sekunda“ ($\mathrm{m\,s}$ nebo $\mathrm{m\cdot s}$).
- Složitější objekty jako vektory nebo tenzory píšeme tučným řezem písma, např. $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}$, $\operatorname{div}\mathbf{B}$, atd. Vektor je také přípustné označit šipkou nad objektem ($\mathbf{A}$ nebo $\vec{A}$), tenzor druhého řádu dvojšipkou, či dvěma šipkami ($\mathbf{T}$ nebo $\overset{\leftrightarrow}{T}$ nebo $\vec{\vec{T}}$) atd.
- Nezaměňujte matematické symboly s „běžnými“ znaky: krát ($\times$) s písmenem „x“, znak pro úhlové vteřiny ($14''$, nikoli 14” nebo 14“), znak pro úhlové minuty ($14'$, nikoli 14‘ nebo 14’), tečku ve skalárním součinu s tečkou za větou ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, nikoli $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}$), atd. Znak minus musí být stejně dlouhý a ve stejné výši jako znak plus ($+-$, nikoli +-).
- Rovnice se centrují a číslují vpravo na řádku v kulaté závorce. Rovnice je součást věty!

Šikmým řezem písma se tedy píší jen proměnné. Všechno ostatní (jednotky, názvy funkcí, zkratky, závorky, pomocné znaky, číslice) se píše základním řezem písma. Vektory se píší tučně, výjimečně se šipkou nad symbolem.

Poznámka. Jak byste zapsali imaginární jednotku, Eulerovo číslo a číslo pí?

[1] Jejich originální znění zde: https://ccf.fzu.cz/pdf/pravidla_vyrazy.pdf.

1.2 Poznámka k jednotkám

Fyzikální veličiny určují nejen velikost (**kvantitativní stránka**), ale i charakter, vlastnosti jevu, děje či procesu (**kvalitativní stránka**). Kvalitativní stránka veličiny je určena jejím názvem, kvantitativní číselnou hodnotou, vyjádřenou ve zvolených jednotkách. Pro vyjadřování jednotek užíváme soustavu jednotek **SI**. Hodnotu dané veličiny zjišťujeme obvykle **měřením** (délka, čas, teplota, ...), v ojedinělých případech (u nespojitých veličin) **čítáním**. Zápis měřené veličiny má tvar:

$$\boxed{x = \{X\} \cdot [X]}\,, \tag{1}$$

slovně,

$$\text{měřená veličina} = \text{číselná hodnota} \cdot \text{jednotka},$$

např. hmotnost, $m = 300\,\mathrm{kg}$. Chceme-li formálně vyjádřit závislost fyzikální veličiny na veličinách vyjádřených v základních jednotkách, hovoříme o **rozměru fyzikální veličiny**[2]. Absurdnost, ke které nutně dojde vynecháním jednotek fyzikálních veličin, ukažme na jednoduchém příkladu:

Příklad 1-1 (♦, podle [8]). Dejme tomu, že pomocí Ohmova zákona počítáme odpor nějakého spotřebiče a výpočet zapíšeme následujícím způsobem:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{20}{2} = 10\,\Omega\,.$$

Takový zápis je ale nesmyslný. U červeně označených hodnot chybí jednotky. Podívejme se blíže na poslední rovnost:

$$\frac{20}{2} = 10\,\Omega\,,$$
$$1 = \Omega$$

Docházíme tak k nesmyslnému tvrzení, že: „jedna se rovná ohm“. Protože navíc $\Omega = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1}$, z výpočtu plyne, že $\mathrm{V} = \mathrm{A}$. Správný zápis tedy musí vypadat takto:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{20\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{A}} = 10\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1} = 10\,\Omega\,.$$

Jednotky musíme uvádět už při dosazení číselných hodnot do vztahu a ne jenom u výsledku! Nicméně (jak už to tak bývá), s vědomím toho, jak to má být správně, si to můžeme dovolit občas oželet. ☺

[2] Jednotku veličiny X značíme hranatými závorkami $[X]$, rozměr $\dim(X)$. Chceme-li například zapsat, že jednotkou síly je newton, zapíšeme:

$$[F] = \mathrm{N}\,.$$

Chceme-li zapsat rozměr síly, zapíšeme:

$$\dim(F) = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Část I
Fyzika I

2 Chyby a nejistoty měření

Měření, při kterém neurčíme, nebo se alespoň nepokusíme odhadnout jeho přesnost, není dobrým měřením. Pokud změříme například dvakrát dobu kyvu kyvadla, pravděpodobně se hodnoty budou lišit. Ale co to znamená? Máme měřit ještě jednou, pětkrát, desetkrát? Nebo neplatí teorie? Na všechny tyto otázky vám odpoví **teorie chyb a nejistot měření.**

2.1 Chyby měření

Žádným měřením nemůžeme s jistotou zjistit skutečnou **pravou hodnotu** měřené veličiny. Výsledek je vždy ovlivněn řadou vlivů, které přesnost měření omezují. Je to omezená přesnost měřicích prostředků a metod, vlivy různých nepostižitelných podmínek, které průběh měření ovlivňují i vlastní osoba pozorovatele, jeho smysly, pečlivost, zkušenost. Souhrn všech vlivů pak způsobí, že se ke skutečné hodnotě měřené veličiny pouze více či méně přiblížíme.

- Rozdíl mezi výsledkem měření a skutečnou hodnotou nazýváme **chybou měření** a označujeme κ_x, kde x je symbolem měřené veličiny.
- Vyjadřujeme ji v **jednotkách měřené veličiny**; v tomto případě ji nazýváme **absolutní chybou** – např. při měření délek pásovým měřítkem je absolutní chyba dána nejmenším dílkem stupnice a činí $\kappa_x = 1\,\mathrm{mm}$.
- Častěji je výhodnější zavést **relativní chybu** měření, která porovnává velikost absolutní chyby měření s hodnotou měřené veličiny a je zvykem ji vyjadřovat v procentech. Je definována vztahem

$$\boxed{\kappa_{rx} = \frac{\kappa_x}{x}}. \tag{2}$$

Relativní chyba je bezrozměrná a lze ji udávat v procentech: $\kappa_{rx} \cdot 100\,[\%]$.

Příklad 2-2 (♦). Změříme-li délku $l = 985\,\mathrm{mm}$ s absolutní chybou $\kappa_l = 1\,\mathrm{mm}$, bude relativní chyba určení délky l následující: $\kappa_{rl} = \dfrac{\kappa_l}{l} = \dfrac{1}{985} = 0,0010$, tedy $\kappa_{rl} = 0,1\,\%$.

Výhodou vyjádření chyby měření jako chyby relativní je v tom, že relativní chyba je bezrozměrná a můžeme ji porovnávat a sčítat (za dodržení specifických pravidel) se stejně vyjádřenými chybami jiných měřených veličin.

2.1.1 Chyby systematické

Zdrojem **systematických chyb** je omezená přesnost měřicích přístrojů, jejich konstrukce, zvolená metoda měření, vliv pozorovatele (např. jeho reakční doba při měření mechanickými stopkami) a další **kontrolovatelné** a **odhadnutelné** vlivy. Systematické chyby nikdy nemůžeme odstranit, můžeme je však poměrně přesně stanovit, nebo alespoň odhadnout. Představují pro nás obvykle **největší** chybu, které se během měření můžeme dopustit, tedy jinými slovy: chyba měření bude vždy menší nebo rovna našemu odhadu. Systematickou chybu veličiny x označujeme jako m_x, případně m_{rx}, vyjádříme-li ji jako chybu relativní.

Základním zdrojem systematické chyby je omezená přesnost měřicích přístrojů. Přesnost přístrojů souvisí s omezenými technickými možnostmi jejich konstrukce, rozlišitelností dílků na stupnici, závislosti přesnosti přístrojů na podmínkách měření (teplota v laboratoři, stabilita elektronických obvodů u číslicových měřidel) a pod. Přestože by bylo možno mnohé systematické chyby snížit volbou dokonalejších měřicích prostředků, není to mnohdy možné z důvodu jejich nedostupnosti. V takových případech lze dosáhnout zvýšení přesnosti např. dodatečnou kalibrací (porovnáním s údajem přesnějšího měřidla) a stanovením korekčních koeficientů, případně užitím takové metody měření, která chybu měření nebo její část umožní odstranit, nebo alespoň snížit.

Příklad 2-3 (⧫). Doba kyvu τ zavěšeného tělesa byla změřena mechanickými stopkami pozorovatelem s chybou $\kappa_\tau = 0,3\,\mathrm{s}$. Pro zvýšení přesnosti změřil pozorovatel čas 10 kyvů a výslednou hodnotu dělil deseti. Protože absolutní chyba měření pozorovatele zůstala při určování deseti kyvů stejná, výsledná chyba, připadající na jeden kyv klesla na desetinu, tedy $\kappa_\tau = 0,03\,\mathrm{s}$.

Chyby analogových přístrojů.

Analogové přístroje vyhodnocují měřenou veličinu **spojitě**, a to jak v čase, tak i v číselné hodnotě. Rozlišitelnost (nejmenší odečitatelná hodnota) je dána naší schopností odečítat na stupnici a bylo by ji možno (pouze teoreticky) libovolně zvýšit (např. užitím lupy). Chybu měřidla obvykle stanovuje výrobce, není-li tomu tak, musíme ji sami odhadnout. Je zvykem, že za chybu m_x volíme nejmenší dílek stupnice, případně jeho polovinu, jsme li si jisti, že ji dokážeme spolehlivě rozlišit. Tento fakt bychom měli brát v úvahu zvláště u přístrojů s nelineární stupnicí. Hodnoty maximálních chyb pro běžně užívaná měřidla uvádí tab. 1.

U **analogových** měřicích přístrojů elektrických (ručkových) je přesnost dána **třídou přesnosti** přístroje T_p. Číselný údaj třídy přesnosti přístroje je uveden v pravém dolním rohu pod stupnicí přístroje, nad značkou, udávající typ přístroje z hlediska vhodnosti pro měření stejnosměrného nebo střídavého proudu. Pro zařazení do tříd přesnosti jsou používány hodnoty z číselné posloupnosti 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5; 5.

Třída přesnosti udává maximální chybu m_x měřené hodnoty v celém rozsahu přístroje vyjádřenou vztahem

$$\boxed{m_x = \frac{1}{100} T_p x_{\max}}, \qquad (3)$$

Tabulka 1: Maximální chyby některých měřidel.

váhy praktikantské	(0,01 – 0,1) g
váhy analytické	(0,001 – 0,01) g
měřítko pásové	(0,5 – 1,0) mm
měřítko posuvné (dle konstrukce)	(0,05 nebo 0,1) mm
mikrometr	0,01 mm
tisícinový indikátor	0,001 mm
teploměry	(0,5 – 1) nejmenší dílek
stopky mechanické	(0,2 – 0,3) s

kde $x_{\max}$ je největší možná hodnota měřené veličiny v daném rozsahu (tzv. plný rozsah).

- Ze vztahu (3) je vidět, že absolutní chyba ručkových elektrických měřicích přístrojů **nezávisí na velikosti měřené hodnoty** a je tedy **stejná** ve všech částech rozsahu.
- Relativní chyba m_{rx}, daná poměrem absolutní chyby měření m_x a měřené hodnoty x bude nejmenší pro měřenou hodnotu rovnou maximální hodnotě rozsahu. V takovém případě je relativní chyba měření rovna třídě přesnosti přístroje, vyjádřené v procentech.
- Protože relativní chyba měření je tím větší, čím menší je měřená hodnota v daném rozsahu, snažíme se měřit vždy na takovém rozsahu, aby měřené hodnota byla ve třetí třetině rozsahu.

Příklad 2-4 (♦). Na ampérmetru s třídou přesnosti $T_p = 0,5$ měříme proud, protékající žárovkou, připojenou ke zdroji napětí. Protékající proud má hodnotu $I = 0,27\,\mathrm{A}$, použitelné rozsahy ampérmetru jsou $0,3\,\mathrm{A}$, $1\,\mathrm{A}$.

1) rozsah $1\,\mathrm{A}$, bude maximální chyba měření $m_I = 0,01 \cdot 0,5 \cdot 1\,\mathrm{A} = 5\,\mathrm{mA}$
2) rozsah $0,3\,\mathrm{A}$, bude $m_I = 0,01 \cdot 0,5 \cdot 0,3\,\mathrm{A} = 1,5\,\mathrm{mA}$
Příslušné relativní chyby měření tedy budou:
v prvém případě (rozsah $1\,\mathrm{A}$) $m_{rI} = \dfrac{m_I}{I} = \dfrac{5\,\mathrm{mA}}{0,27\,\mathrm{A}} = 0,0185 = 1,85\,\%$,
v druhém případě (rozsah $0,3\,\mathrm{A}$) $m_{rI} = \dfrac{m_I}{I} = \dfrac{1,5\,\mathrm{mA}}{0,27\,\mathrm{A}} = 0,0056 = 0,56\,\%$, tedy cca $3\times$ **menší, než v případě prvém**.

Chyby digitálních (číslicových) přístrojů.

Digitální měřicí přístroje měří v čase **nespojitě** (vzorkují), vyjádření hodnoty měřené veličiny je přímo v číslicové podobě a nejmenší rozlišitelná hodnota je dána rozsahem a počtem zobrazovaných číslic.

U **digitálních** měřicích přístrojů je stanovení maximální chyby měření složitější. Vzhledem ke způsobu vyhodnocování měřené veličiny vnitřními obvody přístroje se chyba skládá vždy ze dvou složek a jejich velikost udává výrobce.

Příklad 2-5 (♦). Digitálním voltmetrem byla na rozsahu $0 - 2\,\mathrm{V}$ naměřena hodnota $1,871\,2\,\mathrm{V}$. Voltmetr měří s chybou údaje $0,05\,\%$ naměřené hodnoty + 2 digity posledního místa zvoleného rozsahu. Určete absolutní a relativní nejistotu měřeného napětí.

Absolutní chyba: $m_U = \dfrac{0,05}{100} \cdot 1,871\,2 + 0,000\,2 = 0,001\,2\,\mathrm{V}.$

Relativní chyba: $m_{\mathrm{r}U} = \dfrac{m_U}{U} = \dfrac{0,001\,2\,\mathrm{V}}{1,871\,2\,\mathrm{V}} = 0,000\,61 = 0,061\,\%.$

Chyba stanovená uvedeným způsobem je chybou **základní** a její hodnota je platná pouze při dodržení tzv. referenčních podmínek, stanovených výrobcem. Je to např. povolený rozsah pracovních teplot, maximální vlhkost vzduchu, povolený rozsah kmitočtů při měření střídavého proudu a další.

Další zdroje systematických chyb.

Kromě omezené přesnosti přístrojů se na systematických chybách podílí vliv použité měřicí metody a osobní chyba pozorovatele.

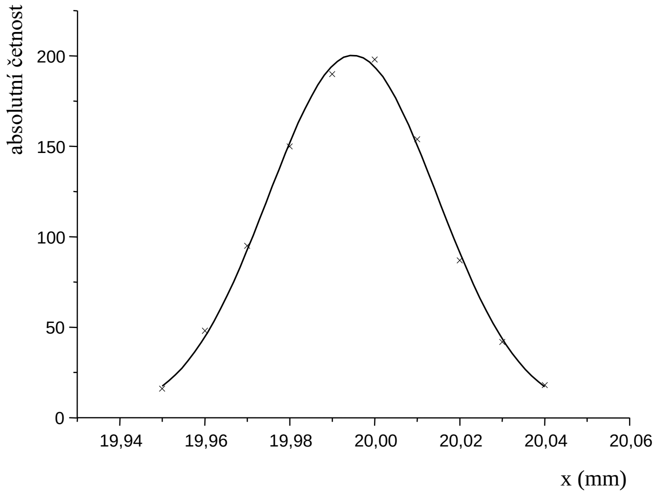
Chyba způsobená měřicí metodou souvisí s nepřesností či nevhodností použitého způsobu měření a lze ji vyloučit nebo alespoň omezit volbou vhodnější metody nebo započtením opravy (korekce na vztlak apod.).

Osobní chyba pozorovatele souvisí s jeho smysly a je pro každého pozorovatele charakteristická. Projevuje se například rozdílnou reakční dobou při měření časových intervalů mechanickými stopkami nebo pozorností a pečlivostí při odečtu údajů na analogových měřidlech a je ovlivněna i momentální fyzickou a psychickou kondicí pozorovatele (únava, nesoustředěnost). Omezit, případně odstranit uvedené chyby lze nahrazením subjektivního posuzování měřené veličiny objektivním hodnocením (např. užitím elektronického měření časových intervalů) nebo nahrazením analogových měřidel měřidly číslicovými.

2.1.2 Chyby nahodilé

Provedeme-li jedno měření nějaké veličiny, dostaneme výsledek, který je ovlivněn všemi popsanými zdroji systematických chyb. Zopakujeme-li měření vícekrát beze změny měřicích podmínek, očekávali bychom teoreticky stejné výsledky. Ve skutečnosti se výsledky obvykle budou od sebe vzájemně lišit, aniž by byla zjevná příčina. Je to způsobeno tím, že kromě kontrolovatelných (systematických) vlivů se na chybě měření podílí i vlivy nekontrolovatelné, související s **náhodnými** změnami měřících podmínek a ovlivňující konečný výsledek. Zkoumáním chování takovýchto souborů náhodných výsledků se zabývá **matematická statistika**, jejíž metody nám umožňují z daného souboru výsledků vypočítat nejpravděpodobnější hodnotu a její chybu.

Vezměme si případ, že budeme v laboratoři opakovaně měřit určitou fyzikální veličinu – např. délku předmětu – stejným měřidlem. Bude-li v průběhu měření v laboratoři kolísat teplota (i v rozmezí pouze $1 - 2\,^\circ\mathrm{C}$), určitě naměříme řadu mírně rozdílných hodnot délky. Výsledky zapíšeme do tabulky, kde jednotlivá měření seskupíme do skupin, odpovídajících přírůstkům měřené hodnoty po nejmenší odečitatelné hodnotě údaje měřidla (např. pro mikrometr po $0,01\,\mathrm{mm}$). Znázorníme-li závislost četnosti naměřených hodnot v jednotlivých skupinách na hodnotě naměřené délky, dostaneme křivku, znázorněnou na obr. 1.



Obrázek 1: Závislost četnosti naměřených hodnot na měřené hodnotě.

- Zobrazená závislost je symetrická kolem svého maxima, největší četnost hodnot odpovídá určité **střední hodnotě** a se zvětšující se vzdáleností od středu četnost naměřených hodnot klesá. Průběh křivky odpovídá **statistickému rozdělení**, charakterizovanému tím, že **pravděpodobnost malých odchylek od střední hodnoty je vysoká, zatímco pravděpodobnost velkých odchylek od střední hodnoty je malá**. Takovéto statistické rozdělení nazýváme **normálním (Gausovým) rozdělením pravděpodobnosti** výskytu měřené hodnoty.

- Z tvaru křivky normálního rozdělení lze usuzovat (a lze to i matematicky přesně odvodit), že nejsprávnější hodnotou bude zřejmě hodnota, odpovídající vrcholu křivky. Matematicky lze tuto hodnotu, nazývanou **aritmetický průměr $\overline{x}$ naměřených hodnot**, vyjádřit vztahem

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}, \tag{4}$$

  kde x_i jsou jednotlivé naměřené hodnoty a n je celkový počet změřených hodnot.

Z matematické statistiky vyplývá, že přesnou hodnotu naměřené veličiny bychom dostali pouze při nekonečném počtu měření, při nižším počtu měření se správné hodnotě pouze více či méně přibližujeme. Míru přiblížení k správné hodnotě udává **rozptyl** naměřených hodnot. U normálního rozdělení můžeme rozptyl vyjádřit pomocí tzv. **směrodatné odchylky** s, která nám udává interval kolem střední hodnoty, ve kterém se vyskytnou naměřené hodnoty s předem známou pravděpodobností.

Směrodatnou odchylku určujeme dvojí, jednak směrodatnou odchylku s_x jednoho měření veličiny x, danou vztahem

$$\boxed{s_x = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)^2}{n-1}}}, \tag{5}$$

jednak **směrodatnou odchylku $s_{\overline{x}}$ aritmetického průměru**

$$\boxed{s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}}. \tag{6}$$

Protože můžeme změřit vždy jen konečný počet hodnot, považujeme naměřené hodnoty za **náhodný výběr** a výše uvedené charakteristické veličiny za veličiny výběrové, hovoříme tedy o **výběrovém průměru** a **výběrové směrodatné odchylce aritmetického průměru**. Podrobněji v dodatku **??**.

Opakovat měření má smysl pouze tehdy, je-li náhodná chyba řádově srovnatelná se systematickou chybou. Jinými slovy – pokud máme nepřesné měřidlo, opakováním výsledek nezpřesňujeme, jen opakovaně měříme hodnotu s velkou systematickou chybou.

2.2 Nejistoty měření

Aby bylo možné vzájemně porovnávat, či jinak užít výsledky měření, byl mezinárodně zaveden obecný přístup k hodnocení jejich přesnosti. Zmíněný přístup k interpretaci výsledků měření je uveden v základním dokumentu GUM (**G**uide to the Expression of **U**ncertainty in **M**easurement) [13] a v normách závazného názvosloví ČSN 01 0115[3] a ČSN-ISO 3534-1[4].

Základem filozofie přístupu k interpretaci výsledků je fakt, že měřením nemůžeme jednoznačně zjistit **skutečnou (pravou) hodnotu** měřené veličiny. Naměřená hodnota určité veličiny se od pravé hodnoty veličiny vždy více či méně liší. **Chyba měření**, která vyjadřuje o kolik se naměřená hodnota liší od hodnoty pravé, je sice statisticky předpověditelná, ale vychází z předpokladu znalosti pravé hodnoty.

Zavedení pojmu **nejistota měření** je zobecněním přístupu k hodnocení přesnosti měření. Nejistota měření charakterizuje interval hodnot okolo výsledku měření, který lze s předem stanovenou mírou pravděpodobnosti odůvodněně přiřadit k hodnotě měřené veličiny. V tomto pohledu je nutnost znalosti pravé hodnoty zcela eliminována.

Nejistota výsledku měření se skládá z:

- příspěvku způsobeného náhodnými vlivy, který nazýváme **standardní nejistotou typu A** a značíme u_A,

[3] ČSN 01 0115: Mezinárodní slovník základních a všeobecných termínů. ČNI, 1996.

[4] ČSN-ISO 3534-1: Statistika – slovník a značky: pravděpodobnost a obecné statistické termíny. ČNI, 1994.

- příspěvku způsobeného známými, odhadnutelnými vlivy, který nazýváme **standardní nejistotou typu B** a značíme u_B.

Výslednou, celkovou nejistotu výsledku měření y nazýváme **standardní kombinovanou nejistotou veličiny** y. Je dána kvadratickým součtem nejistot typu A a B,

$$\boxed{u_y = \sqrt{u_{yA}^2 + u_{yB}^2}}\,. \tag{7}$$

Standardní kombinovaná nejistota udává interval $\pm u_y$ okolo naměřené hodnoty, ve které se může se známou pravděpodobností vyskytovat skutečná hodnota (**konfidenční interval**). Pro případ normálního rozdělení náhodných chyb je tato pravděpodobnost rovna cca 68 %, což je pro naše měření dostačující přesnost.

2.2.1 Přímé měření

Přímým měřením nazýváme takové měření, kdy je výstupní veličina X ve stejných jednotkách jako veličina měřená (např. měření teploty teploměrem).

- **Nejistota typu A** je určena **výběrovou směrodatnou odchylkou** aritmetického průměru $u_{xA} = s_{\overline{x}}$.
- **Nejistota typu B** měřené veličiny x je generována příspěvky různých zdrojů. Prvním úkolem je určit všechny možné zdroje nejistot a většinou se omezíme na ten, který má na měření největší vliv.

Potom odhadneme maximální chybu měřícího přístroje nebo použité metody a dále statistické **rozdělení pravděpodobnosti** výskytu jejich hodnot v tomto intervalu. Vliv různého rozdělení pravděpodobnosti postihuje koeficient χ, který udává poměr mezní odchylky ke směrodatné odchylce pro vybraný typ rozdělení. Výslednou nejistotu typu B určíme vztahem

$$\boxed{u_{zB} = \frac{\Delta z_{\max}}{\chi}}\,. \tag{8}$$

V našich měřeních předpokládáme statistické rozdělení rovnoměrné (je stejná pravděpodobnost výskytu libovolné hodnoty, ležící mezi krajními mezemi), použijeme ve vztahu pro výpočet u_{zB} koeficient $\chi = \sqrt{3}$.

2.2.2 Nepřímé měření

Nepřímým měřením nazýváme takové měření, ve kterém určujeme hodnotu veličiny y na základě vztahu, ve kterém vystupuje **jedna nebo několik přímo měřených veličin**. Veličina y je dána funkční závislostí na přímo měřených veličinách x_j, které nemají přesné hodnoty. Funkční závislost můžeme vyjádřit jako

$$\boxed{y = f(x_1, ..., x_j, ..., x_m)}\,. \tag{9}$$

Hodnotu hledané veličiny y určíme v případě opakovaných měření dosazením výběrových aritmetických průměrů jednotlivých přímo měřených veličin do funkčního vztahu (9).

Kombinovaná standardní nejistota u_y je dána opět vztahem

$$\boxed{u_y = \sqrt{u_{yA}^2 + u_{yB}^2}}\,. \tag{10}$$

Stejně jako v případě chyb měření i v případě určování nejistot můžeme zavést pojem **relativní nejistoty** u_{ry} veličiny y obdobným vztahem vztahu (2), a to **poměrem nejistoty u_y této veličiny k její hodnotě y**

$$\boxed{u_{ry} = \frac{u_y}{y}}\,. \tag{11}$$

Relativní nejistota je bezrozměrná, vyjadřujeme ji obvykle v procentech a umožňuje nám snadné sčítání s nejistotami druhých veličin a hlavně jednoduché porovnávání příspěvku jednotlivých zdrojů nejistot.

Relativní nejistota je pouze pomocnou veličinou pro stanovování konečného výsledku, výslednou nejistotu musíme vždy přepočítat zpět na absolutní tvar, tedy nejistotu vyjádřenou v jednotkách určované veličiny.

a) Nepřímo měřená veličina je lineární kombinací přímo měřených veličin.

$$\boxed{y = f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2}\,, \tag{12}$$

kde a, b jsou reálná čísla. Z kvadratického zákona šíření nejistot vyplývá, že kombinovaná standardní nejistota veličiny y bude mít tvar

$$\boxed{u_y = \sqrt{a^2u_1^2 + b^2u_2^2}}\,, \tag{13}$$

kde u_1, u_2 jsou standardní nejistoty přímo měřených veličin x_1 a x_2.

V případě, že $a = b = 1$ dostáváme **součet a rozdíl dvou veličin**,

$$\boxed{y = f(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2} \tag{14}$$

a vztah (13) můžeme napsat ve výsledném tvaru

$$\boxed{u_y = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\,. \tag{15}$$

Z předchozích výpočtů plyne, že v případě nepřímo měřené veličiny, která je rovna součtu (rozdílu) dvou přímo měřených veličin, je výsledná nejistota rovna odmocnině ze součtu kvadrátů nejistot přímo měřených veličin.

Příklad 2-6 (⧫). Určete tloušťku stěny dutého válce, jehož vnější průměr $d_1 = 12,1\,\mathrm{mm}$ a vnitřní průměr $d_2 = 8,1\,\mathrm{mm}$ byl změřen jedenkrát posuvným měřítkem. Chyba měřidla je pro obě měření shodná, a to $m_{d_1} = m_{d_2} = 0,1\,\mathrm{mm}$. Chyba měřidla je v celém rozsahu měřených hodnot konstantní, jedná se tedy o rovnoměrné rozložení ($\chi = \sqrt{3}$).

Pro tloušťku stěny y platí vztah $y = \frac{1}{2}(d_1 - d_2) = \frac{1}{2}(12,1 - 8,1)\,\mathrm{mm} = 2,00\,\mathrm{mm}$. Nejistota výsledku bude dána pouze nejistotami typu B (jednalo se o jediné měření) a určí se pomocí vztahu (13). Použijeme-li ještě pro určení nejistoty typu B přímého měření vztah (8), potom: $u_{d_1B} = u_{d_2B} = \frac{0,1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{mm}$.

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{0,1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{0,1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{mm} = \frac{1}{2}\frac{0,1}{\sqrt{3}}\sqrt{2}\,\mathrm{mm} = \frac{0,1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{mm} = 0,041\,\mathrm{mm}.$$

Tloušťka stěny dutého válce $y = (2,000 \pm 0,041)\,\mathrm{mm}$, obě měření průměru se podílí na nejistotě výsledku stejnou měrou.

b) Nepřímo měřená veličina je součin nebo podíl mocnin přímo měřených veličin.

$$\boxed{y = f(x_1, x_2) = a x_1^m x_2^n}\,, \tag{16}$$

kde a, m, n jsou reálná čísla. Pro výpočet použijeme relativní nejistoty jednotlivých veličin; pro výslednou standardní nejistotu platí vztah

$$\boxed{u_{ry} = \sqrt{m^2 u_{r1}^2 + n^2 u_{r2}^2}}\,, \tag{17}$$

kde u_{r1}, u_{r2} jsou relativní standardní nejistoty přímo měřených veličin x_1 a x_2.

V případě, že m a n je rovno $+1$ nebo -1, dostáváme pro **součin nebo podíl dvou veličin**

$$\boxed{u_{ry} = \sqrt{u_{r1}^2 + u_{r2}^2}}\,. \tag{18}$$

V případě nepřímo měřené veličiny, která je rovna součinu nebo podílu dvou přímo měřených veličin, je výsledná relativní nejistota rovna odmocnině součtu kvadrátů relativních nejistot přímo měřených veličin.

Příklad 2-7 (⧫). Určete hodnotu odporu R elektrického spotřebiče z jednoho měření proudu I protékajícího spotřebičem při přiložení napětí U. Změřený proud měl hodnotu $I = 100\,\mathrm{mA}$ s chybou měření $m_I = 0,5\,\mathrm{mA}$; napětí na spotřebiči bylo $U = 200\,\mathrm{V}$ s chybou $m_U = 5\,\mathrm{V}$.

Jelikož se jednalo o jediné měření, nejistoty typu A nepočítáme. U běžných (ručkových) elektrických měřidel předpokládáme rovnoměrné rozdělení chyb, můžeme tedy stanovit jednotlivé nejistoty typu B podle vztahu (8): $u_{IB} = \frac{0,5}{\sqrt{3}}\mathrm{mA} = 0,29\,\mathrm{mA}$, $u_{UB} = \frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{V} = 2,9\,\mathrm{V}$. Přepočítáme-li absolutní nejistoty na relativní, dostaneme $u_{rIB} = \frac{0,29}{100} = 2,9\cdot 10^{-3}$, $u_{rUB} = \frac{2,9}{200} = 1,45\cdot 10^{-2}$. Odpor vypočteme z hodnot proudu a napětí pomocí Ohmova zákona $R = \frac{U}{I} = \frac{200\,\mathrm{V}}{100\,\mathrm{mA}} = 2000\,\Omega$. Podle vztahu (17) určíme relativní standardní nejistotu odporu R: $u_{rR} = \sqrt{u_{rI}^2 + u_{rU}^2} = \sqrt{(2,9\cdot 10^{-3})^2 + (1,45\cdot 10^{-2})^2} = 0,0148$. Výsledná nejistota $u_R = u_{rR}R = 0,0148\cdot 2000\,\Omega = 29,57\,\Omega$ (po zaokrouhlení $30\,\Omega$). Výsledek zapíšeme ve tvaru $R = (2000 \pm 30)\,\Omega$.

Příklad 2-8 (♦). Určete obecný vztah pro relativní nejistotu typu B dráhy x, pro kterou platí vztah: $x = v(t_2 - t_1)$; v je rychlost, t_1 a t_2 jsou časy.

Relativní nejistotu typu B stanovte aplikací vztahů (13) a (17).

Protože ve vztahu pro dráhu x je zároveň násobení i odečítání, určete nejprve relativní nejistotu rozdílu $t_2 - t_1$. Platí:

$$u_{(t_2-t_1)\mathrm{B}} = \sqrt{u_{t_2}^2 + u_{t_1}^2}\,,$$

$$u_{\mathrm{r}(t_2-t_1)\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{u_{t_2}^2 + u_{t_1}^2}}{t_2 - t_1}\,.$$

Tuto relativní nejistotu pak použijte do výpočtu celkové relativní nejistoty x typu B:

$$u_{\mathrm{r}x\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{u_{t_2}^2 + u_{t_1}^2}{(t_2 - t_1)^2} + u_{\mathrm{r}v\mathrm{B}}^2}\,.$$

2.2.3 Tomuto odstavci věnujte značnou pozornost! – zaokrouhlení

Výsledná nejistota měření se zaokrouhlí na řád (např. stovky, desítky, jednotky, desetiny, setiny, …) **druhého platného místa nejistoty měření** a vždy **nahoru**. Výsledek měření se poté zaokrouhlí na **stejné řády** a tak, aby počet případných **desetinných míst** byl stejný jako počet desetinných míst zaokrouhlené nejistoty. **Odhadem řádu chyby posuzujeme přesnost výsledku.** Vypisování více platných míst výsledek nezpřesňuje, protože pokud je nejistota například v řádu desítek, vypisování desetinných míst nemá pro přesnost měření žádný význam.

Příklad 2-9 (♦). Příklady zaokouhlení na dvě platné číslice:
$0,0\mathbf{12}3 \doteq 0,0\mathbf{13}$ | $0,\mathbf{12}34 \doteq 0,\mathbf{13}$ | $\mathbf{1},\mathbf{2}345 \doteq \mathbf{1},\mathbf{3}$ | $\mathbf{12},345 \doteq \mathbf{13}$ | $\mathbf{12}\,345 \doteq \mathbf{13}\cdot 10^3$.

Aby to bylo jasné (zejména poslední „fialové“ zaokrouhlení), musíme to dát hned do kontextu se správným zápisem výsledku (viz následující příklad).

Příklad 2-10 (⧫). Máme změřen proud tekoucí spotřebičem a standardní nejistotu, vypočítanou z výrobcem stanovené chyby multimetru:

(i) $I = 35{,}789\,5\,\mathrm{mA}$, $u_I = 0{,}078\,4\,\mathrm{mA}$. Nejistotu zaokrouhlíme **nahoru** na řád druhé platné číslice, tedy na tisíciny: $u_I = 0{,}079\,\mathrm{mA}$. Výsledek zapíšeme v souladu s pravidly o zaokrouhlování ve tvaru:

$$I = (35{,}790 \pm 0{,}079)\,\mathrm{mA}\,.$$

(ii) $I = 3\,578{,}95\,\mathrm{mA}$, $u_I = 7{,}84\,\mathrm{mA}$. Správný zápis výsledku:

$$I = (3\,579{,}0 \pm 7{,}9)\,\mathrm{mA}\,.$$

(iii) $I = 3\,578\,954\,\mathrm{mA}$, $u_I = 784{,}2\,\mathrm{mA}$. Nejistotu zaokrouhlíme jako $u_I = 790\,\mathrm{mA}$. **Zpozorněte**, tento případ je trochu specifický. Nula, která tu vznikla po zaokrouhlení totiž může být brána jako platná číslice, ale také nemusí—je to věc dohody—. V našem kontextu ovšem dává smysl, aby za platnou číslici brána nebyla. Výsledek píšeme jako:

$$I = (3\,578\,950 \pm 790)\,\mathrm{mA}\,.$$

Stejný výsledek můžeme ale zapsat „přirozeněji“ např. jako:

$$I = (357\,895 \pm 79) \cdot 10\,\mathrm{mA}\,.$$

Desetinnou čárku můžeme tedy libovolně posouvat, dodržíme-li pravidlo, že nejistota má dvě platné číslice. Výsledek může být např. zapsán také jako:

$$I = (35\,789{,}5 \pm 7{,}9) \cdot 10^2\,\mathrm{mA}\,,$$

atd.

Pokud je na místě druhé platné číslice nula za desetinnou čárkou (tj. na místě desetin, setin, atd.), musíme ji uvést, např. $u_I = 1{,}0\,\mathrm{mA}$, nikoli $u_I = 1\,\mathrm{mA}$; $u_I = 0{,}10\,\mathrm{mA}$, nikoli $u_I = 0{,}1\,\mathrm{mA}$, atd. Podobná situace může nastat u výsledku měření. V případě, že při zaokrouhlení na stejný počet desetinných míst jako u nejistoty vyjdou za desetinnou čárkou nuly, musíme je také uvést.

2.2.4 Poznámka k zápisu výsledků

Zapsat výsledek můžeme několika způsoby. První možností je, jak jsme ho uvedli např. v předchozím příkladu: $I = (35{,}790 \pm 0{,}079)\,\mathrm{mA}$. Stejný význam má zápis výsledku ve tvaru $I = 35{,}790(79)\,\mathrm{mA}$ a nebo $I = 35{,}790_{79}\,\mathrm{mA}$. To ale může znamenat také $35{,}790\,79$ s tím, že 79 na konci již není příliš přesné.

2.3 Příklady: chyby a nejistoty měření

Příklad 2-11 (♣). Zpracujte následující hodnoty, které byly získány odečtením z mechanických stopek po ukončení každého 4. kmitu torzního kyvadla:

$$t_i\,[\mathrm{s}]:\ 18{,}60;\ 18{,}55;\ 18{,}60;\ 18{,}70;\ 18{,}65\,.$$

Stanovte dobu kyvu a její nejistotu. Výsledek přehledně zapište.

Průměrný naměřený čas $\bar{t} = 18{,}62\,\mathrm{s}$. Doba kyvu $\tau = \bar{t}/8 = 18{,}62/8 = 2{,}327\,5\,\mathrm{s}$.

$$u_{\tau B} = \frac{0{,}3}{8\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{80}\,\mathrm{s}$$

$$u_{\tau A} = \frac{s_\tau}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{t}-t_i)^2}{n(n-1)}} = 0{,}003\,2\,\mathrm{s}$$

$$u_\tau = \sqrt{u_{\tau A}^2 + u_{\tau B}^2}$$

$$\tau = (2{,}328 \pm 0{,}023)\,\mathrm{s}$$

Příklad 2-12 (♣). Jednorázově bylo naměřeno 5 dob kmitu a odečten čas 32,5 s. Jakou absolutní a relativní nejistotou je zatížena doba kyvu?

$$t_{\mathrm{kyv}} = \frac{1}{2}\frac{t}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{32{,}5\,\mathrm{s}}{5} = 3{,}25\,\mathrm{s}$$

$$\kappa_{t_{\mathrm{kyv}}} = \frac{\kappa_t}{10} = \frac{0{,}3}{10}\,\mathrm{s} = 0{,}03\,\mathrm{s}$$

$$u_{t_{\mathrm{kyv}}} = u_{t_{\mathrm{kyv}}B} = \frac{\kappa_{t_{\mathrm{kyv}}}}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}03}{\sqrt{3}}\,\mathrm{s} = 0{,}017\,\mathrm{s}$$

$$u_{rt_{\mathrm{kyv}}} = u_{rt_{\mathrm{kyv}}B} = \frac{u_{t_{\mathrm{kyv}}}}{t_{\mathrm{kyv}}} = \frac{0{,}03}{3{,}25\cdot\sqrt{3}} = 5{,}33\cdot 10^{-3}$$

Příklad 2-13 (♣). Mikrometrem byly opakovaně naměřeny následující hodnoty délky l předmětu v mm: 28,31; 28,31; 28,32; 28,31; 28,33; 28,32; 28,32; 28,33; 28,31; 28,32. Zpracujte naměřené hodnoty, vypočtěte kombinovanou nejistotu délky l a výsledek přehledně zapište.

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i = 28{,}318\,\mathrm{mm}$$

$$u_{r\bar{l}B} = \frac{m_l}{\bar{l}\sqrt{3}} = \frac{0{,}01}{28{,}318\cdot\sqrt{3}} \doteq 0{,}000\,203\,881$$

$$s_{\overline{l}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{l} - l_i)^2}{n(n-1)}} \doteq 0,001\,747\,633\,\mathrm{mm}$$

$$u_{r\overline{l}A} = \frac{s_{\overline{l}}}{\overline{l}} \doteq 0,000\,061\,714$$

$$u_{r\overline{l}} = \sqrt{u^2_{r\overline{l}B} + u^2_{r\overline{l}A}} \doteq 0,001\,759\,485$$

$$u_{\overline{l}} = \overline{l} \cdot u_{r\overline{l}} \doteq 0,049\,825\,\mathrm{mm}$$

$$l = (28,318 \pm 0,050)\,\mathrm{mm}$$

Příklad 2-14 (♣). Průměr drátu byl změřen mikrometrem a jeho velikost je $d = 0,81\,\mathrm{mm}$. Stanovte velikost plochy S průřezu drátu, její absolutní a relativní nejistotu a výsledek přehledně zapište.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,81^2}{4}\,\mathrm{mm}^2 \doteq 0,5153\,\mathrm{mm}^2$$

Nejistota je v tomto případě dána pouze nejistotou typu B,

$$u_{\mathrm{r}S} = u_{\mathrm{r}S\mathrm{B}} = 2u_{\mathrm{rdB}} = 2 \cdot \frac{0,01}{\sqrt{3} \cdot 0,81} = 0,014 = 1,4\,\%$$

$$u_{S\mathrm{B}} = Su_{\mathrm{r}S\mathrm{B}} = 0,5153 \cdot 0,014 = 0,0074\,\mathrm{mm}^2$$

$$S = (0,5153 \pm 0,0074)\,\mathrm{mm}^2$$

Příklad 2-15 (♣). Průměr drátu byl změřen posuvným měřítkem a jeho velikost je $d = 0,9\,\mathrm{mm}$. Stanovte velikost plochy S průřezu drátu, její absolutní a relativní nejistotu a výsledek přehledně zapište.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,9^2}{4}\,\mathrm{mm}^2 = 0,636\,172\,\mathrm{mm}^2$$

$$u_{\mathrm{r}S} = u_{\mathrm{r}S\mathrm{B}} = 2u_{\mathrm{rdB}} = 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{3} \cdot 0,9} = 0,128\,3 = 12,8\,\%$$

$$u_{S\mathrm{B}} = Su_{\mathrm{r}S\mathrm{B}} = 0,636\,172 \cdot 0,128\,3 = 0,081\,62\,\mathrm{mm}^2$$

$$S = (0,636 \pm 0,082)\,\mathrm{mm}^2$$

Příklad 2-16 (♣). Stanovte absolutní a relativní nejistotu plochy S průřezu drátu, jehož průměr byl měřen mikrometrem a jeho velikost je $d = 0,855\,\mathrm{mm}$.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,855^2}{4}\,\mathrm{mm}^2 = 0,574\,146\,\mathrm{mm}^2$$

Nejprve musíme stanovit nejistotu relativní:

$$u_{\mathrm{r}S} = \sqrt{2^2 u_{\mathrm{r}d}^2} = 2u_{\mathrm{r}d} = 2\frac{u_d}{d} = 2\frac{m_d}{\sqrt{3}\,d} = 2 \cdot \frac{0,01}{\sqrt{3} \cdot 0,855} = 0,013\,5\,.$$

Poté absolutní bude

$$u_S = S\,u_{\mathrm{r}S} = 0,574\,146 \cdot 0,013\,5\,\mathrm{mm}^2 = 7,751 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm}^2\,.$$

Příklad 2-17 (♣). Stanovte absolutní a relativní nejistotu plochy S průřezu drátu, jehož průměr byl měřen mikrometrem a jeho velikost je $d = 1,16\,\mathrm{mm}$.

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,16^2}{4}\,\mathrm{mm}^2 = 1,056\,832\,\mathrm{mm}^2$$

$$u_{\mathrm{r}S} = \sqrt{2^2 u_{\mathrm{r}d}^2} = 2u_{\mathrm{r}d} = 2\frac{u_d}{d} = 2\frac{m_d}{\sqrt{3}\,d} = 2 \cdot \frac{0,01}{\sqrt{3} \cdot 1,16} = 9,954 \cdot 10^{-3}\,.$$

$$u_S = S\,u_{\mathrm{r}S} = 1,056\,832 \cdot 9,954 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm}^2 = 0,010\,52\,\mathrm{mm}^2\,.$$

Příklad 2-18 (♣). Rozměry válečku jsou: průměr $d = 48,2\,\mathrm{mm}$ a výška $h = 63,7\,\mathrm{mm}$. Rozměry byly změřeny jednou posuvným měřítkem. Posuďte, zda je možné stanovit objem V válečku s relativní nejistotou menší než $5\,\%$.

$$V(d,h) = \frac{\pi d^2}{4}h = \frac{\pi \cdot 48,2^2}{4} \cdot 63,7\,\mathrm{mm}^3 = 116\,231,379\,\mathrm{mm}^3$$

$$u_{rV} = u_{rVB} = \sqrt{2^2 u_{rdB}^2 + u_{rhB}^2} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{0,1}{48,2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{63,7 \cdot \sqrt{3}}\right)^2} = 0,002\,6 = 0,26\,\%$$

Relativní nejistota u_{rV} je menší než $5\,\%$.

Příklad 2-19 (♣). Rozměry válečku jsou: průměr $d = 41,83\,\mathrm{mm}$ a výška $h = 57,92\,\mathrm{mm}$. Rozměry byly změřeny jednou mikromentrem. Posuďte, zda je možné stanovit objem V válečku s relativní nejistotou menší než $1\,\%$.

$$V(d,h) = \frac{\pi d^2}{4}h = \frac{\pi \cdot 41,83^2}{4} \cdot 57,92\,\mathrm{mm}^3 = 79\,596,535\,\mathrm{mm}^3$$

$$u_{rV} = u_{rVB} = \sqrt{2^2 u_{rdB}^2 + u_{rhB}^2} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{0,01}{41,83 \cdot \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{57,92 \cdot \sqrt{3}}\right)^2} = 0,000\,29 = 0,029\,\%$$

Relativní nejistota u_{rV} je menší než $1\,\%$.

Příklad 2-20 (♣). Stanovte objem V koule a jeho nejistotu, jestliže průměr koule je $d = 20,5\,\mathrm{mm}$ a byl měřen jednou posuvným měřítkem. Výsledek přehledně zapište.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi\cdot 20,5^3\,\mathrm{mm}^3 = 4\,510,868\,9\,\mathrm{mm}^3$$

$$u_{rV} = u_{rVB} = \sqrt{3^2 u_{rdB}^2} = 3u_{rdB} = 3\cdot\frac{0,1}{20,5\cdot\sqrt{3}} = 0,008\,449$$

$$u_V = V u_{rV} = 4\,510,868\,9\cdot 0,008\,449\,\mathrm{mm}^3 = 38,112\,\mathrm{mm}^3$$

$$V = (4\,511\pm 39)\,\mathrm{mm}^3$$

Příklad 2-21 (♣). Stanovte objem V koule a jeho nejistotu, jestliže průměr koule je $d = 20,55\,\mathrm{mm}$ a byl měřen jednou mikrometrem. Výsledek přehledně zapište.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi\cdot 20,55^3\,\mathrm{mm}^3 = 4\,543,955\,8\,\mathrm{mm}^3$$

$$u_{rV} = u_{rVB} = \sqrt{3^2 u_{rdB}^2} = 3u_{rdB} = 3\cdot\frac{0,01}{20,55\cdot\sqrt{3}} = 0,000\,842\,847$$

$$u_V = V u_{rV} = 4\,543,955\,8\cdot 0,000\,842\,847\,\mathrm{mm}^3 = 3,829\,\mathrm{mm}^3$$

$$V = (4\,544,0\pm 3,9)\,\mathrm{mm}^3$$

Příklad 2-22 (♣). Určujeme hustotu ρ z hmotnosti a rozměrů tělesa, kde $m = (62,10\pm 0,05)\,\mathrm{g}$, těleso je ve tvaru válce o průměru $a = 15\,\mathrm{mm}$ a výšce $h = 50\,\mathrm{mm}$. Všechna měření byla prováděna jednou, rozměry byly měřeny posuvným měřítkem. Výsledek, hustotu s její nejistotou, přehledně zapište.

$$\rho(m,a,h) = \frac{m}{V(a,h)} = \frac{6m}{\pi a^3 h} = \frac{6\cdot 62,10}{\pi\cdot 15^3\cdot 50}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}^{-3} = 7,028\,282\cdot 10^{-4}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}^{-3}$$

$$u_{r\rho} = u_{r\rho B} = \sqrt{u_{rmB}^2 + 3^2 u_{raB}^2 + u_{rhB}^2} = \sqrt{\left(\frac{0,05}{62,10}\right)^2 + 9\cdot\left(\frac{0,1}{15\cdot\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{50\cdot\sqrt{3}}\right)^2} =$$
$$= 0,011\,632$$

$$u_\rho = \rho u_{r\rho} = 7,028\,282\cdot 10^{-4}\cdot 0,011\,632\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}^{-3} = 8,175\,297\cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}^{-3}$$

$$\rho = (7\,028\pm 82)\cdot 10^{-7}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mm}^{-3}$$

Příklad 2-23 (♣). Vzorek ve tvaru krychle o straně $a = 50,0\,\mathrm{mm}$ má hmotnost $m = 375,10\,\mathrm{g}$. Hodnota a byla zjištěna posuvným měřítkem jedním měřením. Vzorek byl zvážen na vahách, kde nejmenší dílek odpovídá $0,05\,\mathrm{g}$. Stanovte hustotu ρ materiálu vzorku, její nejistotu a výsledek přehledně zapište.

$$\rho(m,a) = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} = \frac{375,10}{50,0^3}\,\mathrm{g\cdot mm^{-3}} = 3,000\,8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\cdot mm^{-3}}$$

$$u_{r\rho} = u_{r\rho B} = \sqrt{u_{rmB}^2 + 3^2 u_{raB}^2} = \sqrt{\left(\frac{0,05}{375,10\cdot\sqrt{3}}\right)^2 + 9\cdot\left(\frac{0,1}{50,0\cdot\sqrt{3}}\right)^2} = 3,464\,956{\cdot}10^{-3}$$

$$u_\rho = \rho u_{r\rho} = 3,000\,8\cdot 10^{-3}\cdot 3,464\,956\cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\cdot mm^{-3}} = 1,039\,763\cdot 10^{-5}\,\mathrm{g\cdot mm^{-3}}$$

$$\rho = (300,1 \pm 1,1)\cdot 10^{-5}\,\mathrm{g\cdot mm^{-3}}$$

Příklad 2-24 (♣). Voltmetrem byla naměřena hodnota $U = (15,10 \pm 0,05)\,\mathrm{V}$, ampérmetrem byla naměřena hodnota $I = (105,00 \pm 0,11)\,\mathrm{mA}$. Z uvedených hodnot vypočtěte hodnotu odporu R, absolutní a relativní nejistotu odporu. Výsledek (hodnotu odporu s jeho nejistotu) přehledně zapište.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{15,10\,\mathrm{V}}{105,00\,\mathrm{mA}} = 143,809\,52\,\Omega$$

$$u_{rR} = u_{rRB} = \sqrt{u_{rUB}^2 + u_{rIB}^2} = \sqrt{\left(\frac{0,05}{15,10}\right)^2 + \left(\frac{0,11}{105,00}\right)^2} = 3,473\,03\cdot 10^{-3}$$

$$u_R = R u_{rR} = 143,809\,52\cdot 3,473\,03\cdot 10^{-3}\,\Omega = 0,499\,\Omega$$

$$R = (143,81 \pm 0,50)\,\Omega$$

Příklad 2-25 (♣). Elektrický odpor rezistoru je $42\,\Omega$ a byl měřen s relativní nejistotou $0,5\,\%$. Rezistor je ve tvaru drátu, jehož délka je $l = (19,00 \pm 0,05)\,\mathrm{m}$ a průměr $d = (0,45 \pm 0,01)\,\mathrm{mm}$. Stanovte rezistivitu ρ materiálu a její nejistotu. Výsledek přehledně zapište.

$$\rho = R\frac{S}{l} = R\frac{\pi d^2}{4l} = 42\cdot\frac{\pi\cdot(0,45\cdot 10^{-3})^2}{4\cdot 19,00}\,\Omega\cdot\mathrm{m} = 3,515\,690\cdot 10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$$

$$u_{r\rho} = \sqrt{u_{rR}^2 + 2^2 u_{rd}^2 + u_{rl}^2} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{100}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{0,01}{0,45}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{19,00}\right)^2} = 0,044\,802$$

$$u_\rho = \rho u_{r\rho} = 3,515\,690\cdot 10^{-7}\cdot 0,044\,802\,\Omega\cdot\mathrm{m} = 1,575\cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$$

$$\rho = (35,2 \pm 1,6)\cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$$

Příklad 2-26 (♣). S jakou absolutní a relativní nejistotou měří ampérmetr hodnotu proudu $I = 106,0\,\text{mA}$ na rozsahu $(0 - 120)\,\text{mA}$, má-li třídu přesnosti $T_p = 0,2$ (tj. $0,2\,\%$ zvoleného rozsahu).

$$u_I = u_{IB} = \frac{\frac{0,2}{100} \cdot 120}{\sqrt{3}}\,\text{mA} = 0,139\,\text{mA}$$

$$u_{rIB} = \frac{u_{IB}}{I} = \frac{0,139}{106,0} = 0,0013 = 0,13\,\%$$

Příklad 2-27 (♣). Posuďte, jestli je možné voltmetrem třídy přesnosti $T_p = 0,5$ měřit napětí U na rozsahu $0 - 3\,\text{V}$ s nejistotou menší než $0,01\,\text{V}$.

$$u_U = \frac{m_U}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{100} T_p U_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 0,5 \cdot 3}{\sqrt{3}}\,\text{V} = 8,66 \cdot 10^{-3}\,\text{V} < 0,01\,\text{V} \text{ (ano)}$$

Příklad 2-28 (♣). Při určování elektrického odporu z Ohmova zákona byla na ampérmetru odečtena hodnota proudu $I = 100\,\text{mA}$ na rozsahu $0 - 150\,\text{mA}$, třída přesnosti ampérmetru je $T_p = 0,5$. Voltmetrem byla změřena hodnota napětí $U = 2\,\text{V}$ na rozsahu $0 - 3\,\text{V}$, třída přesnosti voltmetru je $T_p = 0,2$. Stanovte hodnotu elektrického odporu R a jeho nejistotu. Výsledek přehledně zapište.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2}{100 \cdot 10^{-3}}\,\Omega = 10\,\Omega$$

$$u_{rU} = \frac{\frac{1}{100} T_p U_{\max}}{\sqrt{3}\,U} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 0,2 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 2} = 1,732\,05 \cdot 10^{-3}$$

$$u_{rI} = \frac{\frac{1}{100} T_p I_{\max}}{\sqrt{3}\,I} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 0,5 \cdot 150}{\sqrt{3} \cdot 100} = 4,330\,13 \cdot 10^{-3}$$

$$u_{rR} = \sqrt{u_{rU}^2 + u_{rI}^2} = \sqrt{(1,732\,05 \cdot 10^{-3})^2 + (4,330\,13 \cdot 10^{-3})^2} = 4,663\,69 \cdot 10^{-3}$$

$$u_R = R u_{rR} = 10 \cdot 4,663\,69 \cdot 10^{-3}\,\Omega = 0,0466\,\Omega$$

$$R = (10,000 \pm 0,047)\,\Omega$$

Příklad 2-29 (♣). Digitálním voltmetrem byla na rozsahu $0 - 2\,\text{V}$ naměřena hodnota $1,871\,2\,\text{V}$. Voltmetr měří s chybou údaje $0,05\,\%$ naměřené hodnoty $+\ 2$ jedničky posledního místa zvoleného rozsahu. Určete absolutní a relativní nejistotu měřeného napětí.

$$u_{UB} = \frac{\frac{0,05}{100} \cdot 1,871\,2 + 0,000\,2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{V} = 0,000\,66\,\mathrm{V}$$

$$u_{rUB} = \frac{u_{UB}}{U} = \frac{0,000\,7}{1,871\,2} = 0,000\,35 = 0,035\,\%$$

Příklad 2-30 (♣). Digitálním ampérmetrem byla na rozsahu $0 - 100\,\mathrm{mA}$ naměřena hodnota $70,00\,\mathrm{mA}$. Ampérmetr měří s chybou údaje $0,3\,\%$ naměřené hodnoty + 3 jedničky posledního místa zvoleného rozsahu. Určete absolutní a relativní nejistotu měřeného proudu I.

$$u_{IB} = \frac{\frac{0,3}{100} \cdot 70,00 + 0,03}{\sqrt{3}}\,\mathrm{mA} = 0,138\,56\,\mathrm{mA}$$

$$u_{rIB} = \frac{u_{IB}}{I} = \frac{0,138\,6}{70,00} = 0,001\,98 = 0,198\,\%$$

Příklad 2-31 (♣). Stanovte hodnotu elektrického odporu rezistoru, jestliže byla naměřena hodnota proudu tekoucího rezistorem $I = 85,5\,\mathrm{mA}$ a hodnota napětí na rezistoru $U = 20\,\mathrm{V}$. Proud byl měřen na rozsahu $0 - 100\,\mathrm{mA}$ ampérmetru, který má maximálně přípustnou chybu danou jako $0,3\,\%$ z naměřené hodnoty a 3 jedniček posledního místa zvoleného rozsahu. Napětí bylo měřeno na voltmetru rozsahu $0 - 30\,\mathrm{V}$, s třídou přesnosti $T_p = 0,5$. Vypočtěte nejistotu elektrického odporu. Výsledek, odpor R s nejistotou, přehledně zapište.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{20\,\mathrm{V}}{85,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}} = 233,918\,\Omega$$

$$u_{\mathrm{r}U\mathrm{B}} = \frac{\frac{1}{100} T_p U_{\max}}{\sqrt{3}\,U} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 0,5 \cdot 30\,\mathrm{V}}{\sqrt{3} \cdot 20\,\mathrm{V}} = 0,004\,3$$

$$u_{\mathrm{r}I\mathrm{B}} = \frac{\frac{0,3}{100} \cdot 85,5\,\mathrm{mA} + 0,3\,\mathrm{mA}}{\sqrt{3} \cdot 85,5\,\mathrm{mA}} = 0,003\,8$$

$$u_{\mathrm{r}R\mathrm{B}} = \sqrt{u_{\mathrm{rUB}}^2 + u_{\mathrm{rIB}}^2} = \sqrt{0,004\,3^2 + 0,003\,8^2} = 0,007\,4$$

$$u_{R\mathrm{B}} = R\,u_{\mathrm{r}R\mathrm{B}} = 233,918 \cdot 0,007\,4\,\Omega = 1,731\,\Omega \doteq 1,8\,\Omega$$

$$R = (233,9 \pm 1,8)\,\Omega$$

Příklad 2-32 (♣). Posuvným měřítkem byl $5\times$ změřen průměr koule:

$$d_i\,[\mathrm{mm}]: \quad 29,9; \quad 29,9; \quad 29,8; \quad 30,0; \quad 30,1\,.$$

Vypočítejte objem koule, jeho nejistotu a výsledek přehledně zapište.

$$\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{5}\cdot(29,9 + 29,9 + 29,8 + 30,0 + 30,1)\,\mathrm{mm} = 29,94\,\mathrm{mm}$$

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{d}^3 = \frac{1}{6}\pi\cdot 29,94^3\,\mathrm{mm}^3 = 14\,052,513\,47\,\mathrm{mm}^3$$

$$u_{rV} = \sqrt{3^2 u_{rd}^2} = 3u_{rd}$$

$$s_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{d} - d_i)^2}{n(n-1)}} = \ldots = 0,050\,99\,\mathrm{mm}$$

$$u_{rVA} = 3u_{rdA} = 3\frac{s_{\overline{d}}}{\overline{d}} = 3\cdot\frac{0,050\,99}{29,94} = 0,005\,109\,2$$

$$u_{rVB} = 3u_{rdB} = 3\cdot\frac{0,1}{29,94\cdot\sqrt{3}} = 0,005\,785$$

$$u_{rV} = \sqrt{u_{rVA}^2 + u_{rVB}^2} = \sqrt{0,005\,109\,2^2 + 0,005\,785^2} = 0,007\,718\,17$$

$$u_V = V\,u_{rV} = 14\,052,513\,47\cdot 0,007\,718\,17\,\mathrm{mm}^3 = 108,459\,6\,\mathrm{mm}^3$$

$$V = (140,5 \pm 1,1)\cdot 10^2\,\mathrm{mm}^3$$

3 Mechanika

3.1 Kinematika

Příklad 3-33 (♣). Určete trajektorii, velikost rychlosti v a velikost zrychlení hmotného bodu a, jehož kartézské souřadnice jsou jako funkce času t vyjádřeny rovnicemi:

$$x = A\cos(\omega t)\,, \quad y = A\sin(\omega t)\,, \quad z = Bt$$

obecně a pro hodnoty $A = 2\,\mathrm{m}$, $B = 3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\omega_1 = \omega_2 = 3\,\mathrm{s^{-1}}$.

Trajektorií hmotného bodu je šroubovice se složkami rychlosti

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t)\,,\\ v_y &= \dot{y} = \omega A\cos(\omega t)\,,\\ v_z &= \dot{z} = B \end{aligned}$$

a složkami zrychlení

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t)\,,\\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} = -\omega^2 A\sin(\omega t)\,,\\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} = 0\,. \end{aligned}$$

Velikost rychlosti

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \\ &= \sqrt{(-\omega A\sin(\omega t))^2 + (\omega A\cos(\omega t))^2 + B^2} = \\ &= \sqrt{\omega^2 A^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + B^2} = \\ &= \sqrt{\omega^2 A^2 + B^2} = \sqrt{3^2\cdot 2^2 + 3^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 3\sqrt{5}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

a velikost zrychlení

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \\ &= \sqrt{(-\omega^2 A\cos(\omega t))^2 + (-\omega^2 A\sin(\omega t))^2 + 0} = \\ &= \sqrt{\omega^4 A^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = \\ &= \sqrt{\omega^4 A^2} = \omega^2 A = 3^2\cdot 2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 18\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,. \end{aligned}$$

Příklad 3-34 (♣). Určete rychlost a zrychlení pohybu, jehož trajektorie závisí na čase podle vztahu (b, c jsou kladné konstanty v základních jednotkách SI):

a) $s = s_0 + ct + \frac{1}{2}gt^2$,

b) $s = c\,\mathrm{e}^{-bt}$.

a) Rychlost a zrychlení

$$v = \dot{s} = c + gt\,, \quad a = \dot{v} = \ddot{s} = g\,.$$

b) Rychlost a zrychlení

$$v = \dot{s} = -bc\,\mathrm{e}^{-bt}\,, \quad a = \dot{v} = \ddot{s} = b^2 c\,\mathrm{e}^{-bt}\,.$$

Příklad 3-35 (♣). Raketa se pohybuje po určitou krátkou chvíli přímočaře, její trajektorie s závisí na čase t podle vztahu

$$s = \frac{2}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + s_0\,.$$

Určete zrychlení a tohoto pohybu v čase $t = 1\,\mathrm{s}$.

První derivace je

$$\dot{s} = \frac{\pi}{2}\frac{2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

a tedy druhá derivace (zrychlení) bude

$$\ddot{s} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{2}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\,,$$

v čase $t = 1\,\mathrm{s}$:

$$\ddot{s} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{2}{9}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{2}{9} = -\frac{\pi^2}{18}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Příklad 3-36 (♣). Dvě auta jedou proti sobě. První rychlostí o velikosti $20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, druhé rychlostí o velikosti $30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Obě auta jsou schopna zastavit z rychlosti o velikosti $25\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ za $5\,\mathrm{s}$.

a) Jak daleko musí být auta, aby se nesrazila?

b) Jak daleko by auta musela být, kdybychom započetli reakční dobu řidičů, která je rovna asi $0,2\,\mathrm{s}$?

a) Určíme nejprve velikost zrychlení, s jakým jsou obě auta schopná zastavit:

$$|a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25-0}{5}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Vyjádříme čas zastavení každého auta z rovnosti $v = v_\mathrm{p} - |a|\Delta t_\mathrm{z} = 0$. Dostaneme

$$\Delta t_\mathrm{z} = \frac{v_\mathrm{p}}{|a|}\,,$$

a tento čas dosadíme do vztahu pro dráhu potřebnou k zastavení:

$$s_\mathrm{z} = v_\mathrm{p}\Delta t_\mathrm{z} - \frac{1}{2}|a|\Delta t_\mathrm{z}^2 = v_\mathrm{p}\left(\frac{v_\mathrm{p}}{|a|}\right) - \frac{1}{2}|a|\left(\frac{v_\mathrm{p}}{|a|}\right)^2 = \frac{v_\mathrm{p}^2}{2|a|}\,.$$

Dráhy potřebné pro zastavení obou aut:

$$s_{\mathrm{z},1} = \frac{v_{\mathrm{p},1}^2}{2|a|} = \frac{20^2}{2\cdot 5}\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{m}\,,$$

$$s_{\mathrm{z},2} = \frac{v_{\mathrm{p},2}^2}{2|a|} = \frac{30^2}{2\cdot 5}\,\mathrm{m} = 90\,\mathrm{m}\,.$$

Aby se auta nesrazila, musely by být od sebe vzdálena o

$$s > s_{\mathrm{z},1} + s_{\mathrm{z},2} = 40\,\mathrm{m} + 90\,\mathrm{m} = 130\,\mathrm{m}\,.$$

b) Připočteme reakční dobu řidičů. Za tento čas každé auto urazí navíc ještě dráhu při jeho plné rychlosti.

$$s_{\mathrm{r},1} = v_1 t_\mathrm{r} = 20\cdot 0,2\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}\,,$$

$$s_{\mathrm{r},2} = v_2 t_\mathrm{r} = 30\cdot 0,2\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}\,.$$

V tomto případě by vzdálenost aut musela být

$$s > s_{\mathrm{z},1} + s_{\mathrm{r},1} + s_{\mathrm{z},2} + s_{\mathrm{r},2} = (40+4+90+6)\,\mathrm{m} = 140\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 3-37 (♣). Těleso padá volným pádem. V bodě A své trajektorie má rychlost $4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, v bodě B má rychlost $16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete:

a) vzdálenost bodů A, B,

b) dobu, za kterou těleso vzdálenost mezi body A, B urazí.

Budeme předpokládat, že těleso pouštíme z klidu, tj. že v čase $t = 0$ je $v_0 = 0$ a místo vypuštění tělesa je v počátku souřadného systému: $x_0 = 0$. Nejprve nás zajímá $\Delta x = x_B - x_A$ (vzdálenost bodů A a B). Protože známe pouze rychlosti tělesa v obou bodech, nevystačíme jenom se vztahem pro volný pád, $x = \frac{1}{2}gt^2$, ale za t dosadíme ještě ze vztahu pro rychlost, $v = gt$. Dostaneme:

$$x = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}\,. \tag{19}$$

Nyní spočteme vzdálenost bodů:

$$\Delta x = x_B - x_A = \frac{1}{2g}\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \frac{1}{2\cdot 9,81}(16^2 - 4^2)\,\mathrm{m} \doteq 12,23\,\mathrm{m}\,.$$

Podobně určíme i čas:

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{v_B}{g} - \frac{v_A}{g} = \frac{v_B - v_A}{g} = \frac{16-4}{9,81}\,\mathrm{s} \doteq 1,22\,\mathrm{s}\,.$$

Poznámka. Pokud bychom ze vztahu (19) vyjádřili rychlost, dostali bychom stejný vztah jako pro rychlost výtoku z nádoby, $v = \sqrt{2gx}$, což si později také odvodíme.

Poznámka. Na tomto příkladu si ještě můžeme ukázat užitečný trik. Vztah pro dráhu (19), který jsme v tomto příkladu odvodili je funkcí rychlosti, $x = f(v)$ a nemohli jsme ho tím pádem získat integrací rychlosti podle času: $\int v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + C$. Mohli bychom to obejít, pokud bychom vyjádřili zrychlení ne jako časovou derivaci, ale derivaci podle souřadnice následovně (trikem, že derivaci přenásobíme jedničkou $1 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}x$):

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{2v\,\mathrm{d}v}{2\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\,\mathrm{d}x}\,. \tag{20}$$

Tady už můžeme přímo integrovat ($a = g$):

$$\int_{v_A^2}^{v_B^2}\mathrm{d}(v^2) = \int_{x_A}^{x_B} 2g\,\mathrm{d}x \quad\rightarrow\quad v_B^2 - v_A^2 = 2g(x_B - x_A) \quad\rightarrow\quad x_B - x_A = \frac{1}{2g}(v_B^2 - v_A^2)\,. \tag{21}$$

Poznámka. Pokud bychom v integraci (21) volili dolní meze jako $v_A^2 = 0$ a $x_A = 0$, dostali bychom opět vztah $v = \sqrt{2gx}$.

Příklad 3-38 (♣). Rychlovarná konvice přestala vařit, byla tedy majitelkou vyhozena oknem z výšky 7 metrů. Jakou rychlostí dopadla konvice na zem? Odpor vzduchu zanedbejte.

Ze vztahu pro dráhu při rovnoměrně zrychleném pohybu (volném pádu) vyjádříme čas dopadu

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad\rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

a dosadíme do vztahu pro rychlost

$$v = gt = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9,81\cdot 7}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 11,7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Příklad 3-39 (♣). Akrobatický lyžař má před odrazem nájezdovou rychlost $57,6\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Předpokládejte, že se na můstku odrazí svisle vzhůru.

a) Určete jeho rychlost za $2\,\mathrm{s}$ a výšku, ve které se bude v té době nacházet.

b) Určete maximální výšku skoku.

Rychlost za dvě sekundy letu vyjádříme jednoduše jako

$$v = v_0 - gt = \frac{57,6}{3,6} - 9,81\cdot 2 = -3,62\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,,$$

dráhu v čase $t = 2\,\mathrm{s}$ jako

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{57,6}{3,6}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot 2^2 \doteq 12,38\,\mathrm{m}\,. \tag{22}$$

Určit maximální výšku skoku znamená najít maximum funkce (22), takže

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}\,. \tag{23}$$

Našli jsme čas, ve kterém je nulová rychlost (= čas maximální výšky). Jeho dosazením do (22) pak získáme maximální výšku jako

$$s = v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2\,, \tag{24}$$

$$s = \frac{57,6}{3,6}\cdot\frac{57,6/3,6}{9,81} - \frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot\left(\frac{57,6/3,6}{9,81}\right)^2 \doteq 13,05\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 3-40 (♣). Gumový míček jsme hodili na zem z výšky $90\,\mathrm{cm}$. Z ruky nám vyletěl rychlostí $8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Do jaké výšky se odrazil od země, pokud srážka míčku se zemí byla dokonale pružná? Do výpočtů dosazujte hodnotu tíhového zrychlení $10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Za předpokladu, že srážka je dokonale pružná platí, že se míček odrazí vzhůru rychlostí o stejné velikosti jako je dopadová. To znamená, že vlastně řešíme svislý vrh, jehož počáteční rychlost má stejnou velikost, jako dopadová rychlost míčku na zem. Pro svislý vrh platí

$$y = vt - \frac{1}{2}gt^2$$

Maximální výšku najdeme z podmínky

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v - gt = 0 \quad\rightarrow\quad t_{\max} = \frac{v}{g}$$

a tedy

$$y_{\max} = v\frac{v}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{2g}\,.$$

Zbývá najít počáteční rychlost v, kterou je, jak jsme řekli, také rychlost dopadová. Tato rychlost tedy bude:

$$v_{\mathrm{dop}} = v_0 + gt_{\mathrm{dop}}\,.$$

Musíme najít čas dopadu t_{dop} ze vztahu:

$$\frac{1}{2}gt_{\mathrm{dop}}^2 + v_0 t_{\mathrm{dop}} - y_{\mathrm{dop}} = 0\,.$$

Řešení:

$$t_{\mathrm{dop}1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\cdot\frac{1}{2}g(-y_{\mathrm{dop}})}}{2\cdot\frac{1}{2}g} = -\frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gy_{\mathrm{dop}}}}{g}$$

Z těchto dvou řešení nás zajímá to s „+“, protože druhé je záporné a to v případě času nedává smysl. Dosadíme ho do vztahu pro dopadovou rychlost:

$$v_{\mathrm{dop}} = v_0 + gt_{\mathrm{dop}} = v_0 + g\left(-\frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gy_{\mathrm{dop}}}}{g}\right) = \sqrt{v_0^2 + 2gy_{\mathrm{dop}}}\,.$$

Tento výsledek už jen dosadíme do vztahu pro maximální výšku:

$$y_{\max} = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\sqrt{v_0^2 + 2gy_{\mathrm{dop}}}\right)^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} + y_{\mathrm{dop}} = \frac{8^2}{2\cdot 10}\,\mathrm{m} + 0,9\,\mathrm{m} = 4,1\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 3-41 (♣). Z rozhledny o výšce 30 m byl vržen kámen ve vodorovném směru rychlostí $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete velikost rychlosti při dopadu na zem a vodorovnou vzdálenost místa dopadu od paty rozhledny. Odpor prostředí zanedbejte.

Využijeme principu superpozice. Pohyb hmotného bodu rozdělíme na dva nezávislé pohyby. Jedním z nich je vodorovný pohyb (ve směru osy x), kde má hmotný bod v čase t polohu x:

$$x = v_0 t \tag{25}$$

a druhým je volný pád, kde má hmotný bod v čase t souřadnici y:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{26}$$

Z celkové uražené vzdálenosti při volném pádu ($y = 0$) vyjádříme čas dopadu, tedy

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{27}$$

a dosadíme do rovnice rovnoměrného přímočarého pohybu:

$$x = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{9,81}} \doteq 24,73\,\mathrm{m}\,.$$

Získali jsme vzdálenost dopadu hmotného bodu od rozhledny. Velikost rychlosti dopadu určíme ze složek rychlosti ve směrech x a $-y$. Ve směru x je rychlost dopadu přímo v_0, ve směru $-y$ je rychlost $v_y = -gt$. Takže

$$v = \sqrt{v_0^2 + (-gt)^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(-g\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \tag{28}$$

$$v = \sqrt{10^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 30}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 26,24\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Příklad 3-42 (♣). Kulička byla vržena pod úhlem $5\pi/18\,\mathrm{rad}$ $(50°)$ rychlostí $15\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete délku vrhu a zapište vztahy pro složky rychlosti ve směru osy x a y.

Podobně jako v předchozím případě, bude

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha\,, \\ y &= v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,. \end{aligned}$$

Zajímá nás souřadnice x místa dopadu. V tomto místě je $y = 0$, tedy:

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}g\,t^2 - v_0 \sin\alpha\, t = 0\,,$$

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 0}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm v_0 \sin\alpha}{g}\,.$$

Z těchto dvou časů je čas dopadu $2v_0 \sin\alpha/g$ tento čas dopadu dosadíme do rovnice souřadnice x:

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha}{g}\cos\alpha = \frac{2 \cdot 15^2 \cdot \sin(5\pi/18)}{9,81} \cdot \cos(5\pi/18)\,\mathrm{m} \doteq 22,59\,\mathrm{m}.$$

Vztahy pro složky rychlostí:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos\alpha\,, \\ \dot{y} &= v_0 \sin\alpha - gt\,. \end{aligned}$$

Příklad 3-43 (♣). Sprinter běží rychlostí $9,2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ po kruhové dráze. Jeho dostředivé zrychlení má velikost $3,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Jaký je poloměr dráhy a perioda jeho pohybu?

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{R} \quad \to \quad R = \frac{v^2}{a_\mathrm{d}}\,\mathrm{m} \doteq 22,3\,\mathrm{m}$$

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{v/\omega} = \omega v = \frac{2\pi}{T}v \quad \to \quad T = 2\pi\frac{v}{a_\mathrm{d}} = 2\pi\cdot\frac{9,2}{3,8}\,\mathrm{s} \doteq 15,2\,\mathrm{s}$$

Příklad 3-44 (♣). Kolo se otáčí s frekvencí $25\,\mathrm{Hz}$. Brzděním lze dosáhnout, že jeho otáčení bude rovnoměrně zpomalené a kolo se zastaví po čase $30\,\mathrm{s}$ od začátku brzdění. Vypočítejte úhlové zrychlení kola.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\Delta t = 0 \quad \to \quad \varepsilon = -\frac{\omega_0}{\Delta t} = -\frac{2\pi f}{\Delta t} = -\frac{2\pi\cdot 25}{30}\,\mathrm{s}^{-2} = -\frac{5}{3}\pi\,\mathrm{s}^{-2}$$

Příklad 3-45 (♣). Sedačka kolotoče je upevněna ve vzdálenosti $240\,\mathrm{cm}$ od středu otáčení a vykonává 18 otáček za minutu. Určitě jí obvodovou rychlost a dostředivé zrychlení.

$$n = 18\,\frac{\mathrm{ot.}}{\mathrm{min}} = 18\,\frac{\mathrm{ot.}}{60\,\mathrm{s}} = 0,3\,\frac{\mathrm{ot.}}{\mathrm{s}}\ (= f)$$

Úhlová frekvence:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 0,3 \doteq 1,885\,\mathrm{s}^{-1}$$

Obvodová rychlost:

$$v = R\omega = 2,4\,\mathrm{m}\cdot 1,885\,\mathrm{s}^{-1} \doteq 4,52\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Dostředivé (normálové) zrychlení:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2\frac{v}{\omega} = v\omega = 4,52\cdot 1,885\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} \doteq 8,52\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

3.2 Dynamika

Příklad 3-46 (♣). Jak velkou silou působí člověk s hmotností 75 kg na podlahu kabiny výtahu, když

a) výtah je v klidu,

b) výtah se pohybuje svisle vzhůru se zrychlením $a = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$,

c) výtah se pohybuje svisle dolů se zrychlením $a = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

a) $F_{\mathrm{a})} = mg = 75 \cdot 9{,}81\,\mathrm{N} = 735{,}75\,\mathrm{N}$

b) $F_{\mathrm{b})} = m(g + a) = 75 \cdot (9{,}81 + 2)\,\mathrm{N} = 885{,}75\,\mathrm{N}$

c) $F_{\mathrm{c})} = m(g - a) = 75 \cdot (9{,}81 - 2)\,\mathrm{N} = 585{,}75\,\mathrm{N}$

Příklad 3-47 (♣). Při akrobatickém letu popisuje letadlo rychlostí $360\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ kružnici o poloměru 400 m ve svislé poloze. Jak velkou tlakovou silou působí letec s hmotností 80 kg na sedadlo v nejvyšším a nejnižším bodě trajektorie?

Stanovíme nejprve normálové zrychlení

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{100^2}{400}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = 25\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Velikost síly na sedadlo

- v nejvyšším bodě

$$F_1 = m(a_n - g) = 80 \cdot (25 - 9{,}81)\,\mathrm{N} = 1\,215{,}2\,\mathrm{N}\,,$$

- v nejnižším bodě

$$F_2 = m(a_n + g) = 80 \cdot (25 + 9{,}81)\,\mathrm{N} = 2\,784{,}8\,\mathrm{N}\,.$$

Příklad 3-48 (♣). Parašutista o hmotnosti 80 kg padá nejprve se zavřeným padákem rychlostí $50\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Po otevření padáku se jeho rychlost během 2 s sníží na $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Vypočítejte velikost brzdící síly padáku.

Předpokládáme, že zrychlení během brzdění bylo konstantní. Potom můžeme spočítat jeho velikost jako

$$|a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50 - 5}{2}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = 22{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Velikost brzdící síly padáku potom je

$$|F| = m|a| = 80 \cdot 22{,}5\,\mathrm{N} = 1\,800\,\mathrm{N}\,.$$

Příklad 3-49 (♣). Baseballový míček o hmotnosti 300 g byl nadhozen rychlostí $50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Po úderu pálkaře se pohyboval rychlostí $100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ v opačném směru. Určete průměrnou sílu $\overline{F}$, kterou působí pálka na míček, jestliže doba trvání úderu je $0,02$ s.

Vzhledem k velmi krátkému časovému úseku úderu zapíšeme přibližně

$$\begin{aligned} \Delta p &= F\Delta t\,, \\ m\Delta v &= F\Delta t\,, \\ m(v_2 - v_1) &= F\Delta t\,. \end{aligned}$$

Odtud průměrná síla

$$\overline{F} = \frac{m(v_2 - v_1)}{\Delta t} = \frac{0,3\cdot[100-(-50)]}{0,02}\,\mathrm{N} = 2\,250\,\mathrm{N}\,.$$

Příklad 3-50 (♣). Výtah zvedne rovnoměrným pohybem náklad do výše 24 m za dobu 12 s. Motor výtahu má při rovnoměrném chodu výkon 20 kW. Jaká může být maximální hmotnost kabiny s nákladem?

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mg\,\Delta h}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad m = \frac{P\,\Delta t}{g\,\Delta h} = \frac{20\cdot 10^3\cdot 12}{9,81\cdot 24}\,\mathrm{kg} \doteq 1\,019,24\,\mathrm{kg}$$

Příklad 3-51 (♣). Letadlo o hmotnosti 20 tun letí ve výšce 10 km nad Zemí rychlostí $720\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Jaká je celková mechanická energie letadla vzhledem k Zemi?

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10^3\cdot\left(\frac{720}{3,6}\right)^2\,\mathrm{J} + 20\cdot 10^3\cdot 9,81\cdot 10\cdot 10^3\,\mathrm{J}$$
$$E = 2\,362\,000\,000\,\mathrm{J} \doteq 2,4\,\mathrm{GJ}$$

Příklad 3-52 (♣). Za jakou dobu přesune jeřáb s příkonem 10 kW břemeno o hmotnosti 15 tun do výšky 8 m, je-li účinnost celého zařízení 70 %?

Výkon

$$P = \eta\cdot\text{příkon} = 0,7\cdot 10^4\,\mathrm{W} = 7\,000\,\mathrm{W}\,.$$

Práce

$$A = mgh = P\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{mgh}{P} = \frac{15\cdot 10^3\cdot 9,81\cdot 8}{7\,000}\,\mathrm{s} \doteq 168,17\,\mathrm{s}\,.$$

Příklad 3-53 (♣). Jeřáb zdvihá bednu o hmotnosti 200 kg svisle vzhůru se zrychlením $0,5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Určete velikost síly, kterou lano působí na bednu.

$$F = m(g+a) = 200\cdot(9,81+0,5)\,\mathrm{N} = 2\,062\,\mathrm{N}$$

Příklad 3-54 (♣). Chlapec táhne po vodorovné cestě ($f = 0,1$) sáňky s nákladem s celkovou hmotností 60 kg silou 75 N po dráze 30 m Určete:

a) zrychlení sáněk s nákladem,

b) rychlost sáněk na konci dráhy a

c) práci, kterou chlapec vykonal.

a)

$$ma = F - F_\mathrm{t} \quad\to\quad a = \frac{F-F_\mathrm{t}}{m} = \frac{F-mgf}{m} = \frac{75-60\cdot 9,81\cdot 0,1}{60}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0,269\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

b) Vyjádříme nejprve čas:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad\to\quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

a dosadíme:

$$v = at = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2sa} = \sqrt{2\cdot 30\cdot 0,269}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 4,02\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

c)

$$W = Fs = 75\cdot 30\,\mathrm{J} = 2\,250\,\mathrm{J}$$

Příklad 3-55 (♣). Určete práci, kterou je třeba vynaložit na stlačení nárazníkové pružiny vagonu o délku $x_0 = 50\,\mathrm{mm}$, jestliže pro sílu při stlačení o délku x platí vztah: $F = kx$ (k je tuhost pružiny). O této pružině je známo, že těleso o hmotnosti $m = 3\,\mathrm{kg}$ upevněné na konci pružiny kmitá s frekvencí $f = 159,15\,\mathrm{Hz}$.

Z teorie kmitání známe vztah pro kruhovou frekvenci harmonického oscilátoru:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega^2\,.$$

Odtud dosadíme tuhost do vztahu pro potenciální energii (= práci) harmonického oscilátoru:

$$W_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m(2\pi f)^2x^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(2\pi\cdot 159,15)^2\cdot 0,05^2\,\mathrm{J} \doteq 3\,750\,\mathrm{J}\,.$$

Příklad 3-56 (♣). Na jednozvratnou páku délky 120 cm působí na konci síla o velikosti 300 N. Síla svírá s podélnou osou páky úhel 40°. Jak velký je moment síly?

Kolmá složka síly F k páce:

$$F_{\perp} = F \sin \alpha \,.$$

Moment síly:

$$M = l \cdot F_{\perp} = l \cdot F \sin \alpha = 1,2 \cdot 300 \cdot \sin (2\pi/9)\,\mathrm{N \cdot m} \doteq 231,4\,\mathrm{N \cdot m}\,.$$

(Jiný, ekvivalentní, způsob si rozmyslete.)

Příklad 3-57 (♣). Malý vozík o hmotnosti m sjíždí bez smýkání po dráze zakončené válcovou plochou o poloměru r. Z jaké minimální výšky musí vozík sjíždět, aby projel celou kruhovou smyčku této válcové plochy? Moment setrvačnosti, valivý odpor koleček a odpor vzduchu zanedbejte.

Aby vozík projel celou kruhovou smyčku, musí mít v jejím nejvyšším bodě nenulovou rychlost. Určíme nejprve její minimální hodnotu a poté stanovíme výšku, z jaké ho musíme spustit, aby v nejvyšším bodě smyčky této minimální rychlosti dosáhl.

Na vozík určitě působí tíhová síla $m\mathbf{g}$ a uvnitř kruhové smyčky na vozík působí smyčka normálovou silou $m\mathbf{a}_\mathrm{n}$. V nejvyšším bodě kruhové smyčky sestavíme pohybovou rovnici

$$m\mathbf{a}_\mathrm{n} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_\mathrm{d}\,,$$

kde $\mathbf{a}_\mathrm{d}$ je dostředivé zrychlení vozíku, směřující v nejvyšším bodě směrem svisle dolů. Vhodnou volbou souřadného systému můžeme rovnici přepsat skalárně

$$-ma_\mathrm{n} - mg = -ma_\mathrm{d} \Rightarrow ma_\mathrm{n} + mg = ma_\mathrm{d}\,.$$

Vozík začne v nejvyšším bodě odpadat od kruhové smyčky, pokud $a_\mathrm{n} = 0$. Z této podmínky dostaneme minimální rychlost, kterou vozík musí v nejvyšším bodě mít, aby celou smyčku projel:

$$mg = ma_\mathrm{d}\,,$$
$$mg = m\frac{v_{\min}^2}{r}\,.$$

Minimální rychlost v nejvyšším bodě bude:

$$g = \frac{v_{\min}^2}{r} \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{gr}\,.$$

Nyní už jenom ze zákona zachování mechanické energie určíme výšku vypuštění, ze které vozík získá v nejvyšším bodě smyčky rychlost $v_{\min}$. Za hladinu nulové potenciální energie zvolíme nejnižší bod smyčky. Označíme h_{min} výšku vypuštění vozíku. Zákon zachování energie bude:

$$mgh_{\mathrm{min}} = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{min}}^2\,,$$
$$mgh_{\mathrm{min}} = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mgr\,.$$

Rovnici můžeme nyní přenásobit $(mg)^{-1}$ a vyjádřit výšku h_{min}:

$$h_{\mathrm{min}} = 2r + \frac{r}{2} = \frac{5}{2}r\,.$$

Vozík projede kruhovou smyčku, vypustíme-li ho z výšky $h > h_{\mathrm{min}} = 5r/2$.

Příklad 3-58 (♣). Jakou nejmenší rychlost musí mít motocyklista, má-li jezdit na vnitřním povrchu duté koule o poloměru 6 m všemi směry? Těžiště motocyklu a jezdce je 0,9 m od povrchu.

Těžiště motocyklu a jezdce se pohybuje po kouli o poloměru $r = R - 0{,}9\,\mathrm{m} = (6 - 0{,}9)\,\mathrm{m} = 5{,}1\,\mathrm{m}$. Na této menší kouli se musí udržet i v nejméně příznivé situaci, kdy je v nejvyšším místě ($a_{\mathrm{d}} = g$):

$$\frac{v^2}{r} = g \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{rg} = \sqrt{5{,}1 \cdot 9{,}81}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 7{,}07\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 25{,}45\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}\,.$$

4 Gravitační pole

Příklad 4-59 (♣). Jak velkou gravitační silou se přitahují dvě železné koule o průměru 1 m, které se navzájem dotýkají? Hustota železa je $7\,860\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Hmotnosti koulí:

$$m_1 = m_2 = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \rho \cdot \frac{\pi d^3}{6}\,.$$

Vzdálenost středů koulí je $d = 1\,\mathrm{m}$. Z Newtonova gravitačního zákona

$$F = \kappa\frac{m_1 m_2}{d^2} = \kappa\frac{\left(\rho \cdot \frac{\pi d^3}{6}\right)^2}{d^2} = \kappa\frac{\rho^2\pi^2 d^4}{36} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7\,860^2 \cdot \pi^2 \cdot 1^4}{36}\,\mathrm{N} \doteq 1{,}13 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\,.$$

Příklad 4-60 (♣). Jak se změní intenzita gravitačního pole Země ve vzdálenosti 1 000 km od jejího povrchu? Poloměr Země na rovníku je 6 378 km.

Velikost síly, kterou je k Zemi přitahován předmět o hmotnosti m ve vzdálenosti r je

$$|\mathbf{F}| = \kappa \frac{m M_Z}{r^2} \,. \tag{29}$$

Intenzitu gravitačního pole definujeme vektorově jako

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{m} \,. \tag{30}$$

Dosadíme z předchozího vztahu, dostaneme

$$|\mathbf{K}| = \kappa \frac{M_Z}{r^2} \,,$$

tedy velikost intenzity gravitačního pole Země. Nyní už spočítáme podíl velikosti intenzity ve vzdálenosti $R_Z + h$ a R_Z (R_Z je poloměr Země):

$$\frac{|\mathbf{K}_h|}{|\mathbf{K}_0|} = \frac{\kappa M_Z}{(R_Z + h)^2} \frac{R_Z^2}{\kappa M_Z} = \frac{R_Z^2}{(R_Z + h)^2} = \frac{6\,378^2}{(6\,378 + 1\,000)^2} \doteq 0,747 \,.$$

1 000 km nad povrchem Země je tedy intenzita gravitačního pole přibližně

$$|\mathbf{K}_{1\,000\,\mathrm{km}}| \doteq 0,75 \cdot |\mathbf{K}_0| \,.$$

Příklad 4-61 (♣). Může těleso o hmotnosti 10^{-5} g ležící na rovníku „uletět“ vlivem odstředivé síly? Poloměr Země na rovníku je 6 378 km. Určete velikost všech sil působících na těleso.

Aby těleso uletělo, muselo by platit

$$\begin{aligned} F_O &> F_g \\ m\frac{v^2}{R_Z} &> mg \\ \frac{v^2}{R_Z} &> g \\ \frac{(R_Z\omega)^2}{R_Z} &> g \\ R_Z\omega^2 &> g \\ R_Z\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &> g \end{aligned}$$

Nakonec dostaneme nerovnost

$$T < 2\pi\sqrt{\frac{R_Z}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6\,378 \cdot 10^3}{9,81}}\,\mathrm{s} \doteq 5\,066,26\,\mathrm{s} \doteq 1,4\,\mathrm{hod} \,. \tag{31}$$

Perioda je ale 24 hod, takže uletět nemůže. Všimněte si, že na hmotnosti tělesa nezáleží.

Příklad 4-62 (♣). Vypočítejte, do jaké výšky nad povrch Země je třeba umístit umělou družici a jakou rychlost jí je třeba udělit, aby byla geostacionární, tj. její poloha vzhledem k Zemi byla neproměnná.

Tentokrát musíme zajistit rovnost

$$F_O = F_g$$

a k tomu zajistit, aby úhlová frekvence družice byla stejná jako Země. Spočítejme nejprve úhlovou frekvenci. Perioda oběhu Země je asi $T \doteq 23\,\mathrm{h}\,56'\,4'' = 86\,164\,\mathrm{s}$, tedy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,164}\,\mathrm{s}^{-1} \doteq 7,292\,1\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Dále

$$F_O = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R\,,$$
$$F_g = \kappa\frac{M_\mathrm{Z}\cdot m}{R^2}\,.$$

Síly porovnáme a vyjádříme R:

$$m\omega^2 R = \kappa\frac{M_\mathrm{Z}\cdot m}{R^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_\mathrm{Z}}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,972\cdot 10^{24}}{(7,292\,1\cdot 10^{-5})^2}}\,\mathrm{m} = 42\,154\,777,42\,\mathrm{m} \doteq 42\,155\,\mathrm{km}\,.$$

Výška družice nad Zemí je

$$h = R - R_\mathrm{Z} = (42\,155 - 6\,378)\,\mathrm{km} = 35\,777\,\mathrm{km}\,.$$

Rychlost:

$$v = R\omega = 42\,154\,777,42\cdot 7,292\,1\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 3\,073,97\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Příklad 4-63 (♣). Na spojnici středů Země a Měsíce najděte místo, ve kterém je výsledné gravitační zrychlení rovno nule. Pro hmotnost Měsíce platí $M_\mathrm{M} = M_\mathrm{Z}/81$. Vzdálenost středů Země a Měsíce je $60R_\mathrm{Z}$.

Označme si $d = 60R_\mathrm{Z}$, x bude vzdálenost hledaného místa od Země a potom $d - x$ bude vzdálenost hledaného místa od Měsíce. Bude-li v hledaném místě těleso o hmotnosti m, bude ho Země přitahovat gravitační silou

$$F_1 = \kappa\frac{M_\mathrm{Z} m}{x^2}$$

a Měsíc silou

$$F_2 = \kappa\frac{M_\mathrm{M} m}{(d-x)^2} = \frac{\kappa}{81}\frac{M_\mathrm{Z} m}{(d-x)^2}\,.$$

Zajímá nás situace, kde $F_1 = F_2$:

$$\begin{aligned}
\kappa\frac{M_Z m}{x^2} &= \frac{\kappa}{81}\frac{M_Z m}{(d-x)^2}\\
\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{81(d-x)^2}\\
\frac{(d-x)^2}{x^2} &= \frac{1}{81}\\
\frac{d^2-2dx+x^2}{x^2} &= \frac{1}{81}\\
\left(\frac{d}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{x}\right) + 1 &= \frac{1}{81}\\
\left(\frac{d}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{x}\right) + \frac{80}{81} &= 0
\end{aligned}$$

Provedeme substituci $\phi = d/x$. Řešíme tedy kvadratickou rovnici

$$\phi^2 - 2\phi + \frac{80}{81} = 0\,.$$

Dostaneme dvě řešení:

$$\phi_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot\frac{80}{81}}}{2} = 1 \pm \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} = \frac{d}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{10}d = \frac{9}{10}\cdot 60R_Z = 54R_Z\\
\phi_2 &= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = \frac{d}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}d = \frac{9}{8}\cdot 60R_Z = 67{,}5R_Z
\end{aligned}$$

Správné řešení je x_1, ve kterém je výsledné gravitační zrychlení nulové. Má ale nějaký význam i řešení x_2? Má, ale není odpovědí na zadání. Porovnávali jsme dvě síly (lépe řečeno **velikosti** sil) působící na fiktivní těleso, no a ty jsou si skutečně rovny v místech x_1 i x_2. Síly jsou ovšem vektory a v prvním případě jsou orientovány opačně ($\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$) a ve druhém stejně ($\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 2\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{F}_2 \neq \mathbf{0}$).

Příklad 4-64 (♣). Určete hmotnost Měsíce, jestliže gravitační zrychlení na povrchu Měsíce je $1{,}67\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ a poloměr Měsíce je $1{,}72\cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

V tomto příkladu je $g_\mathrm{M} = 1{,}67\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $R_\mathrm{M} = 1{,}72\cdot 10^6\,\mathrm{m}$ a $\kappa = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Gravitační síla působící na povrchu Měsíce na těleso o hmotnosti m je

$$F_g = \kappa\frac{M_\mathrm{M}\cdot m}{R_\mathrm{M}^2} = m\cdot g_\mathrm{M}\,.$$

Odtud můžeme vyjádřit hmotnost Měsíce:

$$M_\mathrm{M} = \frac{g_\mathrm{M}R_\mathrm{M}^2}{\kappa} = \frac{1{,}67\cdot(1{,}72\cdot 10^6)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}\,\mathrm{kg} \doteq 7{,}41\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}\,.$$

Příklad 4-65 (♣). Hubbleův vesmírný dalekohled se pohybuje po oběžné dráze ve výšce 576 km nad povrchem Země.

a) Jakou rychlostí se pohybuje?

b) Jaká je jeho oběžná doba?

$$R = 6\,378\,\mathrm{km} + 576\,\mathrm{km} = 6\,954\,\mathrm{km}$$

a) Vyjdeme z toho, že dostředivá síla se rovná gravitační ($F_\mathrm{d} = F_g$):

$$m\frac{v^2}{R} = \kappa\frac{M_\mathrm{Z}\cdot m}{R^2}\,.$$

Odtud získáme vztah pro rychlost

$$v = \sqrt{\kappa\frac{M_\mathrm{Z}}{R}} = \sqrt{6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5,972\cdot 10^{24}}{6\,954\cdot 10^3}}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 7\,568,4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

b)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{R}{v} = 2\pi\cdot\frac{6\,954\cdot 10^3}{7\,568,4}\,\mathrm{s} \doteq 5\,773,12\,\mathrm{s}$$

Příklad 4-66 (♣). Jaká je hustota planety Neptun, má-li poloměr 26 600 km? Na jejím povrchu má gravitační zrychlení hodnotu $11,15\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Vyjádříme nejprve hmotnost planety Neptun:

$$F_g = \kappa\frac{M_\mathrm{N}m}{R_\mathrm{N}^2} = mg_\mathrm{N} \quad\rightarrow\quad M_\mathrm{N} = \frac{R_\mathrm{N}^2 g_\mathrm{N}}{\kappa}$$

S ní už můžeme vypočítat hustotu (se zjednodušením, že Neptun je koule):

$$\rho_\mathrm{N} = \frac{M_\mathrm{N}}{V_\mathrm{N}} = \frac{R_\mathrm{N}^2 g_\mathrm{N}}{\kappa V_\mathrm{N}} = \frac{3g_\mathrm{N}}{4\pi\kappa R_\mathrm{N}} = \frac{3\cdot 11,15}{4\pi\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 24,6\cdot 10^6}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} \doteq 1\,622,28\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$$

Příklad 4-67 (♣). Určete gravitační zrychlení ve výšce 500 km nad povrchem Marsu, má-li hustotu $3\,900\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a poloměr 3 390 km.

Jako v předchozích příkladech je

$$g_\mathrm{M} = \kappa\frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2}\,,$$

což je gravitační zrychlení na povrchu Marsu. My ho chceme znát ve výšce h na povrchem:

$$g_\mathrm{M} = \kappa\frac{M_\mathrm{M}}{(R_\mathrm{M}+h)^2} = \kappa\frac{\rho_\mathrm{M}V_\mathrm{M}}{(R_\mathrm{M}+h)^2} = \kappa\frac{\rho_\mathrm{M}\cdot\frac{4}{3}\pi R_\mathrm{M}^3}{(R_\mathrm{M}+h)^2} =$$
$$= 6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3\,900\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(3\,390\cdot 10^3)^3}{(3\,390\cdot 10^3 + 500\cdot 10^3)^2}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 2,8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Příklad 4-68 (♣). Nalezněte hmotný střed soustavy hmotných bodů (všechny vzdálenosti jsou v metrech):

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\,[0,0]; \quad m_1 = 1\,\mathrm{g} \\ &\mathrm{B}\,[1,0]; \quad m_2 = 2\,\mathrm{g} \\ &\mathrm{C}\,[1,1]; \quad m_3 = 3\,\mathrm{g} \\ &\mathrm{D}\,[0,1]; \quad m_4 = 4\,\mathrm{g} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_\mathrm{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{4} m_i\mathbf{r}_i = \frac{1}{10\,\mathrm{g}}\left[1\,\mathrm{g}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\mathrm{m} + 2\,\mathrm{g}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrm{m} + 3\,\mathrm{g}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{m} + 4\,\mathrm{g}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mathrm{m}\right] =$$
$$= \frac{1}{10\,\mathrm{g}}\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\mathrm{g}\cdot\mathrm{m} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\mathrm{g}\cdot\mathrm{m} + \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}\right] = \frac{1}{10\,\mathrm{g}}\left[\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\mathrm{g}\cdot\mathrm{m}\right] = \begin{pmatrix}1/2\\7/10\end{pmatrix}\mathrm{m}$$

Příklad 4-69 (★, tunel skrz Zemi). Mezi póly Země je úzký tunel jdoucí středem Země, která nechť je homogenní koule o poloměru R_Z.

a) Ukažte, že malá kulička o hmotnosti m vložená do tunelu bude konat harmonický pohyb.

b) Určete dobu, za kterou tímto tunelem kulička dospěje do středu Země. Jakou tam bude mít rychlost, vložíme-li ji na povrchu Země do tunelu s nulovou rychlostí?

Poznámka (gravitace uvnitř Země).

5 Tuhé těleso

Příklad 5-70 (♣). Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti tenké, homogenní tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose, která je k tyči kolmá a prochází jejím středem.

Moment setrvačnosti definujeme:

$$J = \int_m x^2\,\mathrm{d}m\,.$$

Element hmotnosti vyjádříme jako

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho S\,\mathrm{d}x$$

a dosadíme do definičního vztahu (integrujeme nyní podle x; můžeme si práci trochu usnadnit tím, že budeme integrovat od 0 do $l/2$ a integrál přenásobíme dvěma):

$$J = \int_m x^2 \,\mathrm{d}m = 2 \cdot \int_0^{l/2} x^2 \rho S \,\mathrm{d}x = 2\rho S \int_0^{l/2} x^2 \,\mathrm{d}x = 2\rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \rho S \frac{l^3}{12} \,.$$

Výsledek dále upravíme

$$J = \frac{m}{V} S \frac{l^3}{12} = \frac{m}{lS} S \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} m l^2 \,.$$

Poznámka. Podíváme se na to ještě jiným způsobem. Protože průřez tyče zanedbáváme (jinak by nám výše nevypadl a výpočet by byl chybný), můžeme situaci interpretovat ještě trochu jinak. Zapišme to znovu:

$$J = \int_m x^2 \,\mathrm{d}m = \int_V x^2 \rho \,\mathrm{d}V \,.$$

Protože se jedná o jednorozměrný problém, je objem tyče vlastně přímo její délka, $V = l$, a tedy hustota tyče je $\rho = m/l$ (tzv. délková hustota). Můžeme přímo spočítat:

$$\begin{aligned} J &= \int_V x^2 \rho \,\mathrm{d}V = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} \,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^{l/2} x^2 \frac{m}{l} \,\mathrm{d}x = \\ &= 2\frac{m}{l} \cdot \int_0^{l/2} x^2 \,\mathrm{d}x = 2\frac{m}{l} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = 2\frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{24} = \frac{1}{12} m l^2 \end{aligned}$$

Příklad 5-71 (♣). Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti tenké homogenní tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose, která je k tyči kolmá a prochází jejím koncovým bodem.

Podobně jako v předchozím případě:

$$J = \int_m x^2 \,\mathrm{d}m = \int_0^l x^2 \rho S \,\mathrm{d}x = \rho S \int_0^l x^2 \,\mathrm{d}x = \rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \rho S \frac{l^3}{3} \,.$$

Obdobně upravíme:

$$J = \frac{m}{V} S \frac{l^3}{3} = \frac{m}{lS} S \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m l^2 \,.$$

(Zkuste si provést řešení pomocí délkové hustoty.)

Příklad 5-72 (♣). Určete kinetickou energii obruče valící se po vodorovné dráze bez tření. Průměr obruče je 1 m, její hmotnost 1 kg, rychlost středu obruče je $18\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

Kinetická energie bude součtem

$$W_k = W_{k_1} + W_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \,.$$

Za ω dosadíme v/r. Tenkou obruč můžeme nahradit hmotným bodem o hmotnosti obruče, m. Můžeme tedy za J dosadit $J = mr^2$ ($18\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$):

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2 = 1 \cdot 5^2\,\mathrm{J} = 25\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Příklad 5-73 (♣). Homogenní válec o hmotnosti m a poloměru r se valí po vodorovné rovině (rychlost těžiště má velikost v) a najíždí na nakloněnou rovinu. Určete, do jaké výšky h válec vyjede (ztráty energie způsobené třením a odpory zanedbejte).

Moment setrvačnosti homogenního válce je

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$

(odvoďte!). Jeho celková kinetická energie, valí-li se po vodorovné rovině, je

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 \,.$$

Jakmile válec najede nakloněnou rovinu, začne růst jeho potenciální energie. Ve výšce h tento přírůstek bude

$$\Delta W_p = mgh \,.$$

Nechť je na vodorovné rovině nulová hladina potenciální energie. Potom je (i) na vodorovné rovině celková energie válce $W = W_k$ ($W_p = 0$) a (ii) na nakloněné rovině ve výšce h je $W = \Delta W_p$ ($W_k = 0$). Bezeztrát energie platí rovnost

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= W_k \,, \\ mgh &= \frac{3}{4}mv^2 \,. \end{aligned}$$

Výška h tedy je

$$h = \frac{3v^2}{4g} \,.$$

Příklad 5-74 (♣). Tenká homogenní tyč délky l a hmotnosti m rotuje s úhlovou rychlostí ω kolem osy, která je k tyči kolmá. Určete kinetickou energii tyče v případě, že a) osa rotace prochází středem tyče, b) osa rotace prochází koncovým bodem tyče.

Pro oba případy jsme již momenty setrvačnosti odvodili.
a)

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\omega^2 = \frac{1}{24}ml^2\omega^2$$

b)

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

Příklad 5-75 (♣). Setrvačník o momentu setrvačnosti $10\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ se otáčí kolem pevné osy úhlovou rychlostí $120\,\mathrm{s}^{-1}$. Určete

a) čas, po který musí působit brzdící moment silové dvojice o velikosti $4\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$, aby se setrvačník úplně zastavil,

b) počáteční kinetickou energii setrvačníku.

Připomeneme si nejprve jistou analogii mezi translačním a rotačním pohybem:

$$\begin{aligned} x &\to \varphi \\ v &\to \omega \\ a &\to \varepsilon \\ m &\to J \\ F &\to M \end{aligned}$$

V bodě a) si nejprve představme hmotný bod, který se pohybuje po přímce. Dejme tomu, že máme danou sílu $F = ma$, která brzdí jeho pohyb. Abychom stanovili čas Δt, který je potřeba k jeho zastavení touto silou vyjdeme ze známého vztahu

$$v = v_0 - |a|\Delta t\,,$$

ve kterém položíme $v = 0$ a vyjádříme Δt. Dostaneme

$$\Delta t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{F/m} = \frac{mv_0}{F}\,.$$

Teď zcela analogicky pro rotační pohyb. Máme daný moment setrvačnosti $M = J\varepsilon$, který brzdí rotační pohyb setrvačníku:

$$\omega = \omega_0 - |\varepsilon|\Delta t\,.$$

Položíme $\omega = 0$ a vyjádříme Δt:

$$\Delta t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{M/J} = \frac{J\omega_0}{M} = \frac{10\cdot 120}{4}\,\mathrm{s} = 300\,\mathrm{s}\,.$$

Bod b) umíme vyřešit z minulých příkladů:

$$W_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 120^2\,\mathrm{J} = 72 \cdot 10^3\,\mathrm{J}\,.$$

Příklad 5-76 (♣). Disk s momentem setrvačnosti J se roztáčí tak, že jeho úhlová rychlost roste s časem a) lineárně podle vztahu $\omega(t) = \varepsilon t$, b) kvadraticky podle vztahu $\omega(t) = kt^2$. Určete závislost výkonu P na čase t.

Závislost výkonu na čase určíme v obou případech z definice

$$P = \frac{\mathrm{d}E_k(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

a)

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(\varepsilon t)^2 = \frac{1}{2}J\varepsilon^2 t^2$$

$$P = \frac{\mathrm{d}E_k(t)}{\mathrm{d}t} = J\varepsilon^2 t$$

b)

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(kt^2)^2 = \frac{1}{2}Jk^2 t^4$$

$$P = \frac{\mathrm{d}E_k(t)}{\mathrm{d}t} = 2Jk^2 t^3$$

Příklad 5-77 (♣). Na otáčivém kotouči jsou na téže straně od osy otáčení zavěšená závaží o hmotnosti $m_1 = 0,5\,\mathrm{kg}$ ve vzdálenosti $r_1 = 0,2\,\mathrm{m}$ od osy otáčení a $m_2 = 0,2\,\mathrm{kg}$ ve vzdálenosti $r_2 = 0,4\,\mathrm{m}$ od osy otáčení. V jaké vzdálenosti od osy musíme na druhé straně zavěsit závaží o hmotnosti $m_3 = 0,6\,\mathrm{kg}$, aby nastala rovnováha?

Musíme zajistit rovnováhu

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{M}_i = \mathbf{0}\,.$$

Skalárně zapsáno:

$$M_1 + M_2 - M_3 = 0\,,$$

tedy

$$F_1 r_1 + F_2 r_2 - F_3 r_3 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 g\, r_1 + m_2 g\, r_2 - m_3 g\, r_3 = 0\,.$$

Odtud je

$$r_3 = \frac{m_1\, r_1 + m_2\, r_2}{m_3} = \frac{0,5 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,4}{0,6}\,\mathrm{m} = 0,3\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 5-78 (♣). Jak velkou práci musíme vykonat, abychom ocelový válec o hmotnosti 800 kg a poloměru podstavy 0,5 m roztočili na 48 otáček za minutu? Moment setrvačnosti plného válce $J = \frac{1}{2}mr^2$.

$$W = E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(2\pi f)^2 = m(r\pi f)^2 = 800 \cdot [0,5 \cdot \pi \cdot (48/60)]^2\,\mathrm{J} \doteq 1\,263,3\,\mathrm{J}$$

Příklad 5-79 (♣). Tenká homogenní tyč se otáčí kolem osy, která je k tyči kolmá a je vzdálena 0,4 m od jejího těžiště. K této ose byla změřena hodnota momentu setrvačnosti tyče $0,592\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Určete délku tyče, l, jestliže její hmotnost je 1,2 kg.

Ukážeme si řešení s využitím Steinerovy věty. Ta umožňuje vypočítat moment setrvačnosti tělesa kolem osy, která neprochází jejím těžištěm, známe-li moment setrvačnosti tělesa k ose těžištěm procházející. Věta říká, že

$$J = J_\mathrm{T} + mx_\mathrm{T}^2\,, \tag{32}$$

kde x_T je právě vzdálenost od těžištní osy. Moment setrvačnosti k těžištní ose jsme odvozovali:

$$J_\mathrm{T} = \frac{1}{12}ml^2\,.$$

Stačí nám jenom dosadit a vyjádřit přímo délku l:

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + mx_\mathrm{T}^2 \tag{33}$$

$$l = \sqrt{\frac{12(J - mx_\mathrm{T}^2)}{m}} = \sqrt{12\left(\frac{J}{m} - x_\mathrm{T}^2\right)} = \sqrt{12 \cdot \left(\frac{0,592}{1,2} - 0,4^2\right)}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}.$$

Poznámka. Můžeme také vyjít pouze z definice momentu setrvačnosti. Integrovat budeme následovně:

$$\begin{aligned} J &= \int_m x^2\,\mathrm{d}m = \int_V x^2\rho\,\mathrm{d}V = \int_{l/2-x_\mathrm{T}}^{l/2+x_\mathrm{T}} x^2\frac{m}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{l/2-x_\mathrm{T}}^{l/2+x_\mathrm{T}} = \\ &= \frac{1}{3}\frac{m}{l}\left[\left(\frac{l}{2} + x_\mathrm{T}\right)^3 - \left(\frac{l}{2} - x_\mathrm{T}\right)^3\right] = ... = \frac{1}{12}ml^2 + mx_\mathrm{T}^2\,. \end{aligned}$$

V úpravách je užitečné použít vzorec $a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Výsledný vztah momentu setrvačnosti je zřejmě totožný se vztahem (33), který jsme dostali ze Steinerovy věty.

Příklad 5-80 (♣). Jakou rychlost získá koule, která se kutálí po nakloněné rovině z výšky 1 m? $J = \frac{2}{5}mr^2$.

Můžeme vyjít ze zachování mechanické energie:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2\,,$$

$$mgh = \frac{7}{10}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 9{,}81\cdot 1}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 3{,}74\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

6 Mechanika (pevného) kontinua

Příklad 6-81 (♣). Ocelový drát má délku 8 m, obsah příčného řezu 4 mm², modul pružnosti v tahu je 0, 2 TPa. Vypočtěte velikost síly, která způsobí prodloužení drátu o 8 mm.

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$F = SE\frac{\Delta l}{l} = 4\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot\frac{8\cdot 10^{-3}}{8}\,\mathrm{N} = 800\,\mathrm{N}$$

Příklad 6-82 (♣). Zatížením drátu délky 2 m a plochy průřezu $1\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2$ závažím hmotnosti 102 kg dojde k prodloužení drátu o $2{,}2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Vypočítejte normálové napětí, relativní prodloužení a Youngův modul materiálu.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{102\cdot 9{,}81}{1\cdot 10^{-5}}\,\mathrm{Pa} \doteq 1\cdot 10^{8}\,\mathrm{Pa}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2{,}2\cdot 10^{-3}}{2} = 1{,}1\cdot 10^{-3}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1\cdot 10^{8}}{1{,}1\cdot 10^{-3}}\,\mathrm{Pa} \doteq 9{,}1\cdot 10^{10}\,\mathrm{Pa}$$

Příklad 6-83 (♣). Ocelový drát o průměru 0, 002 m a délce 1, 6 m je na jednom konci pevně uchycen. Jak velké síly je třeba na prodloužení drátu o 0, 003 m?

$$\sigma = E\varepsilon$$
$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$
$$F = SE\frac{\Delta l}{l}$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4}E\frac{\Delta l}{l} = \frac{\pi \cdot 0,002^2}{4} \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \frac{0,003}{1,6}\,\mathrm{N} \doteq 1\,237\,\mathrm{N}$$

Příklad 6-84 (♣). Jak velkou silou je třeba zatížit ocelovou tyč ve směru její podélné osy, aby se prodloužila o stejnou hodnotu jako při ohřátí o $1\,^\circ\mathrm{C}$? Plocha průřezu tyče je $100\,\mathrm{mm}^2$, modul pružnosti v tahu je $2,0 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, součinitel délkové teplotní roztažnosti je roven $1,2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Opět z Hookeova zákona:

$$\sigma = E\varepsilon$$
$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$
$$F = SE\frac{\Delta l}{l}$$

Víme, že závislost prodloužení tyče Δl můžeme v malém rozsahu teplot vyjádřit přibližně jako lineární funkci teplotního rozdílu

$$\Delta l(\Delta t) = l\alpha\Delta t\,.$$

Vyjádříme relativní prodloužení $\Delta l/l$ a dosadíme ho do Hookeova zákona:

$$F = SE\alpha\Delta t = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 2,0 \cdot 10^{11} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 1\,\mathrm{N} = 240\,\mathrm{N}\,.$$

7 Mechanika tekutin

Příklad 7-85 (♣). Dutá plechovka s kruhovým otvorem poloměru $0,1\,\mathrm{mm}$ na dně je zatlačována do vodní nádrže. V jaké hloubce začne téci voda otvorem do nádoby, je-li povrchové napětí vody $7,3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$? Hustota vody je $1\,000\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

Síla, která je potřebná k průtoku vody otvorem, je dána povrchovým napětím:

$$F_1 = l \cdot \sigma = 2\pi R \cdot \sigma\,.$$

Označíme h hloubku tohoto otvoru pod hladinou. Tlaková síla, kterou působí voda na otvor jako funkce h, je

$$F_2 = p \cdot S = \rho g h \cdot \pi R^2\,.$$

Nás zajímá případ

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ 2\pi R \cdot \sigma &= \rho g h \cdot \pi R^2 \\ 2\sigma &= \rho g h \cdot R \end{aligned}$$

Odkud hledaná hloubka

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g \cdot R} = \frac{2 \cdot 7,3\ \cdot 10^{-2}}{1\,000 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}\,\mathrm{m} \doteq 0,149\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 7-86 (♣). Do jaké výšky vystoupí horkovzdušný balon o objemu $600\,\mathrm{m}^3$ a hmotnosti $600\,\mathrm{kg}$ za 10 sekund, je-li hustota okolního vzduchu $1,3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$?

Balón je nadlehčován vztlakovou silou

$$F_\mathrm{V} = m_\mathrm{V} g = V \rho_\mathrm{V} g$$

a jeho tíhová síla je

$$F_g = mg\,.$$

Výsledný silový účinek na balón tedy je

$$\sum F = F_\mathrm{V} - F_g = V\rho_\mathrm{V} g - mg$$

a výsledné zrychlení

$$a = \frac{\sum F}{m} = \frac{V\rho_\mathrm{V} g - mg}{m} = g\left(\frac{V\rho_\mathrm{V}}{m} - 1\right)\,.$$

Zrychlení dosadíme do známého vztahu

$$h = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{g \Delta t^2}{2}\left(\frac{V\rho_\mathrm{V}}{m} - 1\right)$$

$$h = \frac{9,81 \cdot 10^2}{2} \cdot \left(\frac{600 \cdot 1,3}{600} - 1\right)\,\mathrm{m} = 147,15\,\mathrm{m}\,,$$

což je hledaná výška za 10 s.

Poznámka. Zkusme ještě spočítat rychlost balónu za 10 s:

$$v(10\,\mathrm{s}) = a\Delta t = g\Delta t\left(\frac{V\rho_\mathrm{V}}{m} - 1\right) = 9,81 \cdot 10 \cdot \left(\frac{600 \cdot 1,3}{600} - 1\right)\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 29,43\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Skoro $106\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$! Ve výpočtu jsme zanedbali odpor prostředí, to nyní napravíme. Budeme předpokládat, že balón má tvar koule. Potom můžeme určit jeho průměr:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

Nyní můžeme vyjádřit velikost kolmého průřezu ke směru pohybu (plocha kruhu)

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{2/3}$$

a sílu odporu prostředí

$$F_\mathrm{O} = \frac{1}{2}CS\rho_\mathrm{V}v^2 = \frac{1}{8}\pi C\rho_\mathrm{V}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{2/3} v^2 \,.$$

Výslednice sil, kterou jsme před tím získali, musí být s odporovou silou v rovnováze:

$$\sum \mathbf{F} + \mathbf{F}_\mathrm{O} = \mathbf{0}\,.$$

Z této rovnováhy vyjádříme rychlost figurující v odporové síle (označíme v_T), tedy limitní (terminální) rychlost stoupání balónu:

$$V\rho_\mathrm{V}g - mg - \frac{1}{8}\pi C\rho_\mathrm{V}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{2/3} v_\mathrm{T}^2 = 0$$

$$V\rho_\mathrm{V}g - mg = \frac{1}{8}\pi C\rho_\mathrm{V}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{2/3} v_\mathrm{T}^2$$

$$v_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{8g}{\pi C\rho_\mathrm{V}}\left(\frac{\pi}{6V}\right)^{2/3}(V\rho_\mathrm{V} - m)}$$

(Součinitel odporu prostředí koule: $C = 0,47$.)

$$v_\mathrm{T} = \sqrt{\frac{8\cdot 9,81}{\pi\cdot 0,47\cdot 1,3}\cdot\left(\frac{\pi}{6\cdot 600}\right)^{2/3}\cdot(600\cdot 1,3 - 600)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \doteq 8,2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

To je asi $29,5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Srov. s našimi $106\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ vidíme, jak **hrubých chyb se v příkladech můžeme dopustit zanedbáme-li odpory prostředí!**

Příklad 7-87 (♣). Norma udává, že v ponorce pro jednoho námořníka musí být průměrně $20\,\mathrm{m^3}$ prostoru. Kolik námořníků může pracovat v ponorce, pokud při ponoření do mořské vody ($\rho = 1\,020\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) působí na povrch ponorky vztlaková síla $15,3\,\mathrm{MN}$.

Vztlakovou sílu známe. Vyjádříme-li ji jako

$$F_\mathrm{V} = m_\mathrm{V}g = \rho_\mathrm{V}Vg\,,$$

můžeme spočítat objem ponorky

$$V = \frac{F_\mathrm{V}}{\rho_\mathrm{V}g} = \frac{15,3\cdot 10^6}{1\,020\cdot 9,81} \doteq 1\,529,1\,\mathrm{m^3}\,.$$

Potom počet námořníků

$$n = \frac{V}{V_1} = \frac{1\,529,1}{20} = 76,455\,.$$

V ponorce jich tedy může pracovat 76.

Příklad 7-88 (♣). Plocha příčného průřezu lodě ve výšce vodní hladiny (plocha dna lodě) je $4\,200\,\mathrm{m}^2$. Po naložení nákladu se ponor zvětšil o $1,7\,\mathrm{m}$. Jaká je hmotnost nákladu, jestliže hustota mořské vody je $1\,020\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$?

Vyjádříme změnu vztlakové síly s hloubkou ponoru

$$\Delta F_{\mathrm{V}} = \Delta m_{\mathrm{V}} \cdot g = \Delta V \rho_{\mathrm{V}} \cdot g = S \cdot \Delta h \cdot \rho_{\mathrm{V}} \cdot g$$

a porovnáme s tíhou nákladu $G = mg$:

$$mg = S \cdot \Delta h \cdot \rho_{\mathrm{V}} \cdot g\,.$$

Hledaná hmotnost bude

$$m = S \cdot \Delta h \cdot \rho_{\mathrm{V}} = 4\,200 \cdot 1,7 \cdot 1\,020\,\mathrm{kg} \doteq 7,283 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}\,.$$

Příklad 7-89 (♣). Železná kotva se jeví ve vodě lehčí o $200\,\mathrm{N}$ než ve vzduchu. (a) Jaký je její objem? (b) Kolik kotva váží na vzduchu? Hustota železa je $7,870\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$, hustota vody je $1\,000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

Ve vodě na kotvu působí síla $F_1 = F_G - F_{\mathrm{vz}}$ a ve vzduchu přímo síla $F_2 = F_G$, přičemž $F_{\mathrm{vz}} = V\rho g$, kde V je objem a ρ hustota vody. Máme zadán rozdíl těchto sil:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = F_G - F_G + F_{\mathrm{vz}} = V \rho_{\mathrm{H_2O}}\, g$$

a) Objem kotvy můžeme přímo vyjádřit:

$$V = \frac{\Delta F}{\rho_{\mathrm{H_2O}}\, g} = \frac{200}{1\,000 \cdot 10}\,\mathrm{m}^3 = 0,02\,\mathrm{m}^3\,.$$

b) Hmotnost kotvy na vzduchu:

$$m = \rho_{\mathrm{Fe}} V = 7\,870 \cdot 0,02\,\mathrm{kg} = 157,4\,\mathrm{kg}\,.$$

Příklad 7-90 (♣). Člun plující ve sladké vodě vytlačí $4\,000\,\mathrm{kg}$ vody. Určete: a) Jaká bude hmotnost vytlačené vody, když člun popluje ve slané vodě hustoty $1,03\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$? b) Změní se objem vytlačené vody? Jestliže ano, tak na kolik? Hustota vody je $1\,000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

Z Archimédova zákona:

$$F_{\mathrm{vz}} = V \rho_{\mathrm{v}}\, g = m_{\mathrm{v}}\, g = G_{\mathrm{v}}\,.$$

a) Hmotnost vytlačené vody se tedy nezmění. b) Objem se podle výrazu výše změnit musí (jestliže má slaná voda jinou hustotu) a to na hodnotu

$$V = \frac{m_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{v}}} = \frac{4\,000}{1\,030}\,\mathrm{m}^3 \doteq 3,88\,\mathrm{m}^3\,.$$

Příklad 7-91 (♣). Nádrž ve tvaru krychle o objemu $8\,\mathrm{m}^3$ stojí na podlaze a je až po okraj naplněna vodou. Její čelní stěna byla prostřelena nábojem přesně ve středu stěny. Do jaké vodorovné vzdálenosti od hrany nádrže bude vytékající voda dopadat?

Označíme: a délku hrany krychle, h_1 výšku hladiny ode dna, h_2 výšku průstřelu ode dna, x vzdálenost místa dopadu vody od hrany nádrže. Použijeme Bernoulliovu rovnici ve tvaru

$$p + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 = \mathrm{konst}\,.$$

Označme ještě (i) místo hladiny vody a (ii) místo těsně za průstřelem vně nádoby. Platí:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad p_1 + \rho g h_1 + 0 = \mathrm{konst}\,,\\
&\text{(ii)} \quad p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 = \mathrm{konst}\,.
\end{aligned}$$

Mezi místy (i) a (ii) tak dostaneme

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v^2\,.$$

Vyjádříme rychlost v (rychlost výtoku kapaliny z otvoru nádoby ve směru x: v_x):

$$v = v_x = \sqrt{2\left[\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(h_1 - h_2)\right]}\,.$$

Pokud je nádoba shora otevřená, je tlak p_1 tlak barometrický: $p_1 = p_\mathrm{b}$, a protože těsně za otvorem je tlak kapaliny přibližně také už tlak barometrický: $p_2 \simeq p_\mathrm{b}$, je $p_1 \simeq p_2$ a člen $(p_1 - p_2)/\rho \simeq 0$, takže ho zanedbáme. Rozdíl $(h_1 - h_2)$ je výška vodního sloupce nad otvorem, kterou můžeme označit h. Máme tedy

$$v_x = \sqrt{2gh}\,.$$

Tento vztah už známe. Stejně tak je dále už úloha ekvivalentní vodorovnému vrhu s počáteční rychlostí v_x z výšky $h_2 = a/2$. Určíme dobu pádu z dalšího známého vztahu

$$y = h_2 - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}\,.$$

Vzdálenost dopadu vody, x, bude:

$$x = v_x t = \sqrt{2gh}\cdot\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 2\sqrt{hh_2} = 2\sqrt{\frac{a^2}{4}} = a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{8}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 7-92 (♣). Určete sílu, kterou působí voda na svislou stěnu akvária. Délka stěny je $0,5\,\mathrm{m}$, voda v akváriu sahá do výšky $0,4\,\mathrm{m}$, hustota vody je $1\,000\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$.

Zavedeme souřadnici x s nulou v místě hladiny a kladnými hodnotami směrem dolů. Hydrostatický tlak je lineární funkcí hloubky x:

$$\Delta p(x) = p(x) - p_{\mathrm{b}} = \rho g x\,.$$

Zavedeme element síly působící na stěnu jakožto tlak působící na element plochy stěny:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}S\Delta p = \mathrm{d}x \cdot l\Delta p = \mathrm{d}x \cdot l\rho g x\,.$$

Celkovou sílu vody na svislou stěnu akvária pak získáme přeintegrováním tohoto elementu síly přes celou hloubku:

$$F = \int_0^h \mathrm{d}x \cdot l\rho g x = l\rho g \int_0^h \mathrm{d}x \cdot x = l\rho g \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{l\rho g h^2}{2}\,,$$

$$F = \frac{0,5 \cdot 1\,000 \cdot 9,81 \cdot 0,4^2}{2}\,\mathrm{N} = 392,4\,\mathrm{N}\,.$$

Příklad 7-93 (♣). Vypočítejte tlak a sílu působící z vnějšku na okénko ponorky o průměru $0,3\,\mathrm{m}$ nacházející se v hloubce $1000\,\mathrm{m}$ pod hladinou oceánu. Hustota vody $1\,024\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, tlak na hladinu oceánu $1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$.

Tlak působící na okénko ponorky:

$$p = \rho g h + p_{\mathrm{b}} = (1\,024 \cdot 9,81 \cdot 1\,000 + 1 \cdot 10^5)\,\mathrm{Pa} \doteq 1,01 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa}\,.$$

Síla na okénko ponorky:

$$F = pS = p\frac{\pi d^2}{4} \doteq 1,01 \cdot 10^7 \cdot \frac{\pi \cdot 0,3^2}{4}\,\mathrm{N} \doteq 7,14 \cdot 10^5\,\mathrm{N}\,.$$

Příklad 7-94 (♣). Obsahy průřezů válců hydraulického lisu jsou $20\,\mathrm{cm}^2$ a $800\,\mathrm{cm}^2$. Na menší píst působí síla o velikosti $100\,\mathrm{N}$. Určete:

a) Tlak, který tato síla vyvolá v kapalině.

b) Velikost tlakové síly působící na větší píst.

c) Dráhu, o kterou se posune větší píst, jestliže se menší píst posune o $8\,\mathrm{cm}$.

d) Práci, kterou při tomto posunutí vykoná tlaková síla.

a)

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{100\,\mathrm{N}}{20 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 5 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$$

b)

$$F_2 = pS_2 = 5 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa} \cdot 800 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 4 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$$

c)

$$S_1 l_1 = S_2 l_2$$
$$l_2 = \frac{S_1}{S_2} l_1 = \frac{20}{800} \cdot 8\,\mathrm{cm} = \frac{1}{5}\,\mathrm{cm}$$

d)

$$A = F_1 l = 100\,\mathrm{N} \cdot 8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 8\,\mathrm{J}$$

Příklad 7-95 (♣). V širší části trubice o průřezu $4\,\mathrm{cm}^2$ proudí voda rychlostí $0,2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ při výšce sloupce v tlakoměrné trubici $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$. Do jaké výšky vystoupí voda v tlakoměrné trubici v užší části trubice o průřezu $2\,\mathrm{cm}^2$?

Sestavíme Bernoulliovu rovnici:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\,.$$

Vodní sloupce v tlakoměrných trubicích působí hydrostatickým tlakem $p = \rho g h$, to dosadíme a ještě potřebujeme spočítat rychlost v_2, kterou neznáme a tu získáme z rovnice kontinuity: $S_1 v_1 = S_2 v_2 \to v_2 = (S_1/S_2) v_1$:

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 v_1^2\,.$$

Dostaneme

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g}\left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right] = 0,2\,\mathrm{m} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,2^2}{9,81} \cdot \left[1 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right]\,\mathrm{m} \doteq 0,194\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 7-96 (♣). Čerpadlo načerpá za 1 minutu 300 l vody. Přívodní potrubí má průměr 80 mm, výtokovým potrubím proudí voda rychlostí $8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete rychlost vody v přívodním potrubí a průměr výtokového potrubí.

$$Q_1 = Q_2 = \frac{300\,\mathrm{l}}{60\,\mathrm{s}} = \frac{300\,\mathrm{dm}^3}{60\,\mathrm{s}} = \frac{300 \cdot (10^{-1}\,\mathrm{m})^3}{60\,\mathrm{s}} = \frac{0,3\,\mathrm{m}^3}{60\,\mathrm{s}} = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$$
$$Q_1 = S_1 v_1 \quad \to \quad v_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,08^2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 0,995\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$Q_2 = S_2 v_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 \quad \to \quad d_2 = \sqrt{\frac{4Q_2}{\pi v_2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 8}}\,\mathrm{m} \doteq 2,82 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 28,2\,\mathrm{mm}$$

Příklad 7-97 (★, Klepsydra – antické vodní hodiny). Určete tvar rotační nádoby se svislou osou y tak, aby se při výtoku vody průřezem q ve dně nádoby hladina vody snižovala rovnoměrně, tj. konstantní rychlostí v_1.

Hladina vody v takové rotační nádobě tvoří kruh, jehož poloměr x je funkcí y: $x(y)$ a jeho plocha je: $S(y) = \pi x^2$. Z Bernoulliovy rovnice vyjádříme rychlost v_0 výtoku vody průřezem q:

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 = \rho g y \quad \Rightarrow \quad v_0(y) = \sqrt{2gy}\,.$$

Sestavíme rovnici kontinuity:

$$\begin{aligned} v_1 S(y) &= v_0(y) q \\ v_1 \cdot \pi x^2 &= q\sqrt{2gy} \\ x^2 &= \frac{q}{\pi v_1}\sqrt{2gy} \\ x^4 &= \frac{q^2}{\pi^2 v_1^2} \cdot 2gy \end{aligned}$$

Výsledná funkce $y = f(x)$ je:

$$y = \frac{\pi^2 v_1^2}{2q^2 g}\, x^4 = C x^4\,.$$

8 Kmity a vlnění

Příklad 8-98 (♣). Harmonické kmitání hmotného bodu je popsáno rovnicí $y = 0,2 \sin(0,5\pi t)$. Určete, ve kterých časech bude okamžitá výchylka rovna $0,1\,\mathrm{m}$.

Hledáme všechna řešení t pro rovnici

$$0,1 = 0,2\sin(0,5\pi t)\,.$$

Označíme $\phi := 0,5\pi t$, řešíme tedy

$$\sin\phi = \frac{1}{2}\,.$$

Je jasné, že takových řešení je nekonečně mnoho. Pomůže nám nakreslit si jednotkovou kružnici – na té najdeme dvě: $\pi/6$ a $5\pi/6$. Z periodičnosti funkce sinus potom plynou řešení všechna:

$$\phi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{a} \quad \phi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,,$$

kde k je celé číslo. Dosadíme-li za ϕ zpět $0,5\pi t$, dostaneme časy

$$t = \left(\frac{1}{3} + 4k\right)\,\mathrm{s} \quad \text{a} \quad t = \left(\frac{5}{3} + 4k\right)\,\mathrm{s}\,.$$

Příklad 8-99 (♣). Harmonické kmitání hmotného bodu je popsáno rovnicí $y = 0,2 \sin(0,5\pi t)$. Určete amplitudu výchylky, maximální rychlost a zrychlení hmotného bodu.

Amplitudu odečteme přímo ($y = A \sin(\omega t)$):

$$A = 0,2\,\mathrm{m}\,.$$

Rychlost a zrychlení obecně:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos(\omega t)$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A \sin(\omega t)$$

Odtud můžeme odečíst maximální hodnoty, jsou rovny amplitudám:

$$v_{\max} = |\omega A| = 0,5\pi \cdot 0,2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$a_{\max} = |-\omega^2 A| = 0,5^2\pi^2 \cdot 0,2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\pi^2}{20}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Příklad 8-100 (♣). Zavěšením závaží o hmotnosti $20\,\mathrm{g}$ na pružinu se její délka prodlouží o $8\,\mathrm{cm}$. Jakou frekvenci bude mít pružina, jestliže ji rozkmitáme zavěšením závaží o hmotnosti $50\,\mathrm{g}$?

Označíme: $m_1 = 20\,\mathrm{g} = 0,02\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 50\,\mathrm{g} = 0,05\,\mathrm{kg}$. Vztah pro frekvenci:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$
$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Tuhost pružiny, k, dostaneme ze známého prodloužení při zatížení hmotností m_1:

$$F = k\Delta l \;\Rightarrow\; k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{m_1 g}{\Delta l}$$

Výsledný vztah pro frekvenci:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1 g}{m_2 \Delta l}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{0,02 \cdot 9,81}{0,05 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}}\,\mathrm{Hz} \doteq 1,115\,\mathrm{Hz}$$

Příklad 8-101 (♣). Těleso o hmotnosti $0,12\,\mathrm{kg}$ osciluje tam a zpět v přímém směru. Jeho výchylka, měřená od počátku souřadnic, je popsána vztahem $x = 0,16\,\sin(3\pi t + 0,5\pi)$. Určete velikost síly, která působí na těleso v čase $1\,\mathrm{s}$.

$$x = A\,\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A\,\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\,\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$
$$F = ma = -m\omega^2 x = -m\omega^2 A\,\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$F(1\,\mathrm{s}) = -0,12 \cdot (3\pi)^2 \cdot 0,16 \cdot \sin(3\pi \cdot 1 + 0,5\pi)\,\mathrm{N} \doteq 1,71\,\mathrm{N}$$

Příklad 8-102 (♣). Jaké je největší zrychlení plošiny, která kmitá s amplitudou $2,2\,\mathrm{cm}$ a s frekvencí $6,6\,\mathrm{Hz}$?

Viz předchozí příklad.

$$a_{\mathrm{max}} = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A = (2\pi \cdot 6,6)^2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 37,8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Příklad 8-103 (♣). Vlastní frekvence mechanického oscilátoru je $2\,\mathrm{Hz}$. Pružina oscilátoru je natažena směrem dolů z rovnovážné polohy silou $20\,\mathrm{mN}$. Při tomto ději byla vykonána práce $0,2\,\mathrm{mJ}$. Napište rovnici kmitání oscilátoru.

Hledáme rovnici ve tvaru
$$x = A \sin(\omega t)\,.$$
ω můžeme určit hned. Je totiž $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2\,\mathrm{s}^{-1} = 4\pi\,\mathrm{s}^{-1}$. Ještě musíme najít amplitudu A (využijeme vztah $F = kx$):
$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{x}x^2 = \frac{1}{2}Fx\,.$$
Vyjádříme
$$x = \frac{2W}{F} = \frac{2 \cdot 0,2}{20}\,\mathrm{m} = 0,02\,\mathrm{m} = A\,.$$
Zapíšeme výsledný vztah:
$$x = 0,02\,\sin(4\pi\,t)\,\mathrm{m}\,.$$

Příklad 8-104 (♣). Těleso o hmotnosti $400\,\mathrm{g}$ koná kmitavý pohyb. Amplituda výchylky je $5\,\mathrm{cm}$ a perioda $0,2\,\mathrm{s}$. Vypočítejte celkovou energii tělesa.

Celková energie oscilátoru:

$$E = E_k + E_p = \text{konst.}$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Protože celková energie oscilátoru $E = \text{konst.}$, můžeme ji určit z krajní polohy (maximální výchylky), zde je totiž $v = 0$ a $x = A$, takže

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \,.$$

Konečně

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,4\cdot\left(\frac{2\pi}{0,2}\right)^2\cdot 0,05^2\,\mathrm{J} \doteq 0,493\,\mathrm{J}$$

Příklad 8-105 (♣). Vlnění je popsáno rovnicí $y = 0,04\sin 2\pi(8t + 5x)\,\mathrm{m}$. Určete:

a) amplitudu, periodu a rychlost vlnění,

b) výchylku bodu vzdáleného $1,5$ metru od zdroje vlnění v čase 6 sekund.

a)

$$y(t,x) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Srov. se zadanou rovnicí zjistíme:

$$A = 0,04\,\mathrm{m}$$
$$8\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{1}{T} \;\Rightarrow\; T = \frac{1}{8}\,\mathrm{s} = 0,125\,\mathrm{s}$$
$$5\,\mathrm{m}^{-1} = \left|-\frac{1}{\lambda}\right| \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{5}\,\mathrm{m} = 0,2\,\mathrm{m}$$
$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,2}{0,125}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1,6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Poznámka. $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 0,2\cdot 8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1,6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

b)

$$y(6;1,5) = 0,04\sin\left[2\pi\left(8\cdot 6 + 5\cdot 1,5\right)\right] = 0,04\sin\left[2\pi\left(48 + 7,5\right)\right] = 0,04\sin\left[111\pi\right] = 0$$

Příklad 8-106 (♣). Napište rovnici rovinné postupné vlny o amplitudě výchylky $0,6\,\mathrm{mm}$ a periodě $0,003\,\mathrm{s}$, která se šíří rychlostí $330\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ v kladném směru osy x.

$$\begin{aligned} y(t,x) &= A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] = \\ &= 0,6\sin\left[\frac{2\pi}{0,003\,\mathrm{s}}\left(t-\frac{x}{330\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}\right)\right]\mathrm{mm} = \\ &= 0,6\sin\left[2\pi\left(333,3\,\mathrm{s}^{-1}\,t-\frac{333,3\,\mathrm{s}^{-1}\,x}{330\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}\right)\right]\mathrm{mm} = \\ &= 0,6\sin\left[2\pi\left(333,3\,\mathrm{s}^{-1}\,t-1,01\,\mathrm{m}^{-1}\,x\right)\right]\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Příklad 8-107 (♣). Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, šířící se na vlákně ve směru $+x$, má-li tato vlna vlnovou délku $10\,\mathrm{cm}$, frekvenci $400\,\mathrm{Hz}$ a amplitudu $2\,\mathrm{cm}$. Jaká je rychlost vlny?

Jedná se o rovnici typu
$$y(x,t) = A\,\sin\left(\omega t - kx\right).$$
Rozepíšeme:
$$y(x,t) = A\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\,\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right].$$
Podle zadání identifikujeme:
$$\begin{aligned} A &= 2\,\mathrm{cm} = 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\,, \\ \frac{1}{T} &= 400\,\mathrm{s}^{-1}\ (=f)\,, \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{10\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{0,1\,\mathrm{m}} = 10\,\mathrm{m}^{-1}\,. \end{aligned}$$
Výsledek:
$$y(x,t) = 2\cdot 10^{-2}\,\sin\left[2\pi(400t-10x)\right]\mathrm{m}\,.$$

Příklad 8-108 (♣). Příčná postupná vlna, šířící se na velmi dlouhé struně, je popsána rovnicí $y = 0,07\,\sin\left(2\pi t + 0,1\pi x\right)$, kde souřadnice x a y jsou vyjádřeny v metrech a čas t v sekundách. Pro tuto vlnu určete:

a) amplitudu a frekvenci vlnění a

b) rychlost šíření vlnění.

c) Jaká je příčná výchylka struny v místě $x = 4\,\mathrm{cm}$ a v čase $t = 0,5\,\mathrm{s}$?

a)

$$A = 0,07\,\mathrm{m}$$

Rovnici upravíme např. do tvaru

$$y = A\ \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right],$$

tedy:

$$y = 0,07\ \sin\left[2\pi\left(t - \frac{x}{20}\right)\right]\,\mathrm{m}\,.$$

Porovnáním dostaneme frekvenci:

$$\omega = 2\pi \quad \rightarrow \quad 2\pi f = 2\pi \quad \rightarrow \quad f = 1\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

b) V předchozím také přímo vidíme, že

$$c = 20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

c)

$$y(0,04;0,5) = 0,07\ \sin\left(2\pi\cdot 0,5 + 0,1\pi\cdot 0,04\right)\mathrm{m} \doteq -8,8\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = -8,8\,\mathrm{mm}$$

Příklad 8-109 (♣). Vlnění s periodou T postupuje podél osy x. Bod se souřadnicí $x_0 = 4\,\mathrm{cm}$ má v čase $t = T/6$ okamžitou výchylku $y = 0,5A$. Určete vlnovou délku tohoto vlnění.

$$\begin{aligned}
y &= A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\\
\frac{1}{2}A &= A\sin 2\pi\left(\frac{T/6}{T} - \frac{0,04}{\lambda}\right)\\
\frac{1}{2} &= \sin 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{0,04}{\lambda}\right)\\
\sin\frac{\pi}{6} &= \sin 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{0,04}{\lambda}\right)\\
\frac{\pi}{6} &= 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{0,04}{\lambda}\right)\\
\frac{1}{12} &= \frac{1}{6} - \frac{0,04}{\lambda}\\
\frac{0,04}{\lambda} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\\
\lambda &= 12\cdot 0,04 = \frac{12}{25}\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Příklad 8-110 (★, něco z akustiky). Kolikrát je nutno snížit intenzitu zvuku v daném místě, chceme-li snížit hladinu intenzity zvuku a) o 5 dB a b) o 10 dB.

Vztah pro hladinu intenzity zvuku je

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} \,.$$

Snížíme-li hladinu intenzity o X: $B - X$, bude n-krát menší intenzita zvuku I: $\frac{1}{n}I$. Dosadíme:

$$B - X = 10 \log \frac{\frac{1}{n}I}{I_0} = 10 \log \frac{1}{n} + 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{1}{n} + B$$

Vidíme zajímavou skutečnost, že se B nakonec odečte:

$$-X = 10 \log \frac{1}{n} \,.$$

Vyjádřením n získáme velmi zajímavou závislost:

$$n = 10^{\frac{X}{10}} \,.$$

Říká vlastně toto: Za X dosaď, o kolik nižší chceš hladinu intenzity zvuku B a dostaneš n, tj. kolikrát musíš zmenšit intenzitu zvuku I. Pro případy a) a b):

a)

$$n = 10^{\frac{X}{10}} = 10^{\frac{5}{10}} \doteq 3,16$$

b)

$$n = 10^{\frac{X}{10}} = 10^{\frac{10}{10}} = 10$$

9 Molekulová fyzika a termodynamika

9.1 Několik základních pojmů...

9.1.1 z molekulové fyziky

Definujeme nejprve *atomovou hmotnostní jednotku* m_u. Využijeme k tomu izotop uhlíku $^{12}_{6}$C. V jeho jádře se nachází 6 protonů a 6 neutronů (= 12 nukleonů), které tvoří prakticky celou hmotnost tohoto atomu, m_C, a které mají téměř stejnou hmotnost. Definujeme tedy

$$m_u = \frac{1}{12} m_C = 1,66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,, \tag{34}$$

jako přibližnou průměrnou hmotnost 1 nukleonu v jádře.

Dále zavedeme *relativní atomovou hmotnost* A_r, která udává, kolik hmotnostních jednotek nějaký atom obsahuje, jako

$$A_r = \frac{m_a}{m_u} \,, \tag{35}$$

kde m_a je hmotnost tohoto atomu. Analogicky zavedeme *relativní molekulovou hmotnost* M_r jako

$$M_r = \frac{m_m}{m_u}\,, \tag{36}$$

kde m_m je hmotnost molekuly. Poznamenejme, že součet relativních hmotností všech atomů nějaké molekuly je roven relativní hmotnosti této molekuly.

Látkové množství n udává počet částic v látce a její jednotkou je mol. Jeden mol libovolné látky obsahuje právě kolik elementárních jedinců, kolik je atomů v $0,012\,\mathrm{kg}$ izotopu uhlíku ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. Množství částic v jednotkovém látkovém množství (v jednom molu látky) vyjadřuje *Avogadrova konstanta*: $N_\mathrm{A} \doteq 6,022\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$. Samotná číselná hodnota je tzv. *Avogadrovo číslo*. Látkové množství (počet „molů částic“ látky) tedy je

$$n = \frac{N}{N_\mathrm{A}}\,, \tag{37}$$

kde N je počet částic látky.

Dále definujeme *molární hmotnost* látky, M_m, [hmotnost jednoho molu látky $(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1})$] jako

$$M_m = \frac{m}{n} \tag{38}$$

a *molární objem* látky, V_m, [objem jednoho molu látky $(\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{mol}^{-1})$] jako

$$V_m = \frac{V}{n}\,. \tag{39}$$

Protože hmotnost látky, m, je daná hmotností jejích molekul: $m = Nm_m$, můžeme za pomoci zavedených vztahů odvodit:

$$M_m = \frac{m}{n} = \frac{Nm_m}{\dfrac{N}{N_\mathrm{A}}} = N_\mathrm{A}m_m = N_\mathrm{A}m_uM_r = 6,022\cdot 10^{23}\cdot 1,66\cdot 10^{-27}M_r \doteq 10^{-3}M_r\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\,, \tag{40}$$

tedy

$$M_m \doteq M_r\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\,. \tag{41}$$

9.1.2 z kinetické teorie

Vnitřní energie ideálního plynu, který je jako celek v klidu, je rovna celkové kinetické energii všech jeho molekul. Pokud je plyn složen z N stejných jednoatomových molekul, je jeho celková kinetická energie

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}mv_i^2\,, \tag{42}$$

kde m je hmotnost molekuly a v_i je velikost rychlosti i-té molekuly. *Střední kvadratická rychlost* v_k je taková rychlost, kterou by musely mít všechny molekuly plynu, aby jejich celková kinetická energie byla stejná jako skutečná kinetická energie celé soustavy:

$$N\frac{1}{2}mv_k^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}mv_i^2\,, \quad \text{odkud} \quad v_k = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i^2} = \sqrt{\langle v^2\rangle}\,. \tag{43}$$

Střední kinetická energie jedné jednoatomové molekuly je rovna

$$\langle E_\mathrm{k}\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}mv_k^2\,. \tag{44}$$

V rovnovážném stavu připadá na každý stupeň volnosti makroskopické soustavy stejná střední hodnota energie $k_\mathrm{B}T/2$. Tento princip se nazývá *ekvipartiční teorém*, tedy

$$\langle E_\mathrm{k}\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}m\langle v_x^2\rangle + \frac{1}{2}m\langle v_y^2\rangle + \frac{1}{2}m\langle v_z^2\rangle = 3\cdot\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T\,. \tag{45}$$

Odtud je patrná *kinetická definice teploty* (pro 3 stupně volnosti)

$$T = \frac{2\langle E_\mathrm{k}\rangle}{3k_\mathrm{B}} = \frac{m\langle v^2\rangle}{3k_\mathrm{B}} = \frac{mv_k^2}{3k_\mathrm{B}}\,. \tag{46}$$

Jednoatomová molekula ideálního plynu má pouze 3 (translační) stupně volnosti (viz předchozí výpočet); rotační stupně volnosti nemá, protože ji považujeme za bodovou částici. Dvouatomová molekula má celkem 5 stupňů volnosti (2 navíc jsou za rotace) a potom

$$\langle E_\mathrm{k}\rangle = 5\cdot\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T\,. \tag{47}$$

Tří a víceatomovým molekulám připadá vždy 6 stupňů volnosti:

$$\langle E_\mathrm{k}\rangle = 6\cdot\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T = 3k_\mathrm{B}T\,. \tag{48}$$

Vnitřní energie ideálního plynu tedy bude

$$U = N\langle E_\mathrm{k}\rangle = N\frac{s}{2}k_\mathrm{B}T = nN_\mathrm{A}\frac{s}{2}\frac{R_\mathrm{m}}{N_\mathrm{A}}T = \frac{s}{2}nR_\mathrm{m}T \tag{49}$$

kde s je počet stupňů volnosti, n látkové množství a R_m je molární plynová konstanta ($R_\mathrm{m} = k_\mathrm{B}N_\mathrm{A} = 8,314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$).

Uveďme ještě jenom několik tvarů stavové rovnice ideálního plynu bez odvození:

$$pV = Nk_\mathrm{B}T = nN_\mathrm{A}k_\mathrm{B}T = nR_\mathrm{m}T = \frac{m}{M_\mathrm{m}}R_\mathrm{m}T\,. \tag{50}$$

9.2 Příklady

Příklad 9-111 (♣). Určete teplotu T, při které mají molekuly kyslíku O_2 stejnou střední kvadratickou rychlost jako molekuly dusíku N_2 při teplotě 100 °C. Přibližné hodnoty relativních atomových hmotností jsou: kyslík $A_r = 16$, dusík $A_r = 14$.

$$v_k = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T_{\mathrm{O}_2}}{2A_{r,\mathrm{O}_2}m_u}} = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T_{\mathrm{N}_2}}{2A_{r,\mathrm{N}_2}m_u}}$$

$$\frac{T_{\mathrm{O}_2}}{A_{r,\mathrm{O}_2}} = \frac{T_{\mathrm{N}_2}}{A_{r,\mathrm{N}_2}}$$

$$T_{\mathrm{O}_2} = A_{r,\mathrm{O}_2}\frac{T_{\mathrm{N}_2}}{A_{r,\mathrm{N}_2}} = \left(16\cdot\frac{100+273,15}{14} - 273,15\right)\,^\circ\mathrm{C} \doteq 153,3\,^\circ\mathrm{C}$$

Příklad 9-112 (♣). Vypočítejte a) počet molů a b) počet molekul v $1\,\mathrm{cm}^3$ ideálního plynu při tlaku $100\,\mathrm{Pa}$ a teplotě $220\,\mathrm{K}$. Boltzmannova konstanta $k_\mathrm{B} = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ Avogadrova konstanta $6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

a)

$$pV = nRT$$
$$pV = nN_\mathrm{A}k_\mathrm{B}T$$

$$n = \frac{pV}{N_\mathrm{A}k_\mathrm{B}T} = \frac{100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 220}\,\mathrm{mol} \doteq 5,47 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{mol}$$

b)

$$N = nN_\mathrm{A} = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = \frac{100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 220} \doteq 3,29 \cdot 10^{16}\,\text{(molekul)}$$

Příklad 9-113 (♣). Vakuum, kterého lze dosáhnout v laboratoři, odpovídá zhruba tlaku $1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{Pa}$. Kolik molekul se nachází v jednom krychlovém centimetru při tomto tlaku a teplotě $293\,\mathrm{K}$?

(Viz předchozí příklad.)

$$N = nN_\mathrm{A} = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = \frac{1 \cdot 10^{-10} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293} \doteq 24\,732\,\text{(molekul)}$$

Příklad 9-114 (♣). Vypočítejte střední kvadratickou rychlost molekul kyslíku O_2 při teplotě $-3\,°\mathrm{C}$. Relativní atomová hmotnost kyslíku je 16.

O_2 má dvouatomové molekuly, tedy 5 stupňů volnosti a tím pádem kinetickou energii rovnou $5k_\mathrm{B}T/2$. Protože střední kvadratická rychlost souvisí pouze s translacemi molekul, získáme ji z energie $\langle E_{k,\mathrm{pos}}\rangle \leq \langle E_k\rangle$ (rovnost nastane v případě jednoatomového ideálního plynu) a budeme tedy uvažovat pouze translační stupně volnosti:

$$\langle E_{k,\mathrm{pos}}\rangle = \frac{1}{2}mv_k^2 = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T\,.$$

Odtud

$$v_k = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T}{m}} = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T}{2A_r m_u}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (-3 + 273,15)}{2 \cdot 16 \cdot 1,660\,5 \cdot 10^{-27}}}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 458,8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Příklad 9-115 (♣). V láhvi je uzavřen kyslík O_2, který má hmotnost 1 g, tlak 1 MPa a teplotu 47 °C. Uzávěr láhve dobře netěsní, takže kyslík uniká. Po určitém čase byl opět změřen tlak a teplota a bylo zjištěno, že tlak klesl na 5/8 své původní hodnoty a teplota klesla na 27 °C. Relativní atomová hmotnost kyslíku je 16.

a) Jaký je vnitřní objem láhve?

b) Určete hmotnost kyslíku, který unikl.

a) Objem získáme přímo ze stavové rovnice $pV = nRT$. Nejprve určíme látkové množství n. Molární hmotnost je přibližně $M_\mathrm{m} \doteq M_\mathrm{r}\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}} = 2\cdot 16\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}} = 32\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. Potom látkové množství:

$$n = \frac{m}{M_\mathrm{m}} = \frac{1}{32}\,\mathrm{mol}\,.$$

Objem:

$$V = \frac{n_1 R T_1}{p_1} = \frac{\frac{1}{32}\cdot 8,314\cdot(47+273,15)}{1\cdot 10^6} = 8,318\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3} \doteq 83\,\mathrm{cm^3}$$

b) Láhev má samozřejmě konstantní objem, tudíž:

$$V = \frac{n_1 R T_1}{p_1} \quad \text{a také} \quad V = \frac{n_2 R T_2}{p_2}\,,$$

takže

$$\frac{n_1 R T_1}{p_1} = \frac{n_2 R T_2}{p_2} = \frac{n_2 R T_2}{\frac{5}{8} p_1}$$

$$n_1 T_1 = \frac{8}{5} n_2 T_2$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{5}{8}\frac{T_1}{T_2} = \frac{5}{8}\cdot\frac{47+273,15}{27+273,15} = 0,666\,6$$

Hmotnost uniklého kyslíku:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = m_1\frac{n_2}{n_1} - m_1 = m_1\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) = 1\,\mathrm{g}\cdot(0,666\,6 - 1) = -0,333\,3\,\mathrm{g}\,.$$

Příklad 9-116 (♣). Určete práci, kterou vykoná plyn při izotermické expanzi, jestliže jeho počáteční objem je $V_1 = 10\,\mathrm{dm^3}$, tlak $p_1 = 10^3\,\mathrm{kPa}$, tlak po expanzi $p_2 = 10^2\,\mathrm{kPa}$.

Vyjádříme práci:

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}x = pS\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}V$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

Víme, že se jedná o izotermickou expanzi. Potřebujeme pro tento případ najít $p = f(V)$. Využijeme přímo stavovou rovnici:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{V}nRT$$

a dosadíme

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} nRT \, \mathrm{d}V = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \, \mathrm{d}V = nRT \left[\ln V\right]_{V_1}^{V_2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Neznáme podíl objemů, ani teplotu; pomůžeme si opět ze stavové rovnice:

$$p_1V_1 = nRT$$
$$p_2V_2 = nRT$$

V odvozeném výrazu pro práci neznáme nRT. Protože ale stavová rovnice musí platit v libovolném „místě“ izotermické změny, platí i v místě 1, kde součin tlaku a objemu, p_1V_1, známe, dosadíme ho tedy za nRT. To si můžeme dovolit, protože je $T =$ konst a pak plyne také, že

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} \, .$$

Nakonec tedy dostaneme

$$A = p_1V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = 1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} \cdot \ln \frac{10^3}{10^2} \, \mathrm{J} = 23{,}025 \, \mathrm{kJ}$$

Příklad 9-117 (♣). Oxid uhelnatý CO byl uzavřen v nádobě o objemu 2000 dl při teplotě 30 °C a normálním tlaku $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa. Plynu bylo dodáno teplo $Q = 10$ kJ. Určete a) změnu teploty, b) konečný tlak plynu.

Vsuvka. Podíváme se nejprve na 1. zákon termodynamiky v diferenciálním tvaru

$$\mathrm{d}U = \delta Q - \delta W \, . \tag{51}$$

Tedy změna vnitřní energie uzavřené termodynamické soustavy je dána dodaným teplem a vykonanou prací (podrobněji ve skriptech). Představme si, že máme nafukovací balónek a skleněnou lahev, naplněné ideálním plynem tak, že mají stejný objem a že plyn má v obou těchto nádobách stejný počet molekul a teplotu T_1. Chceme dodat nějaké teplo ΔQ tak, aby se zvětšila teplota na hodnotu T_2 a zajímá nás, jestli musíme dodat stejné množství tepla v obou případech. Odpověď je, že ne. Vyjádříme δQ z 1. zákona termodynamiky:

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta W = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V \quad \rightarrow \quad \Delta Q = \int (\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V)$$

Protože v případě láhve je objem konstantní, je $\mathrm{d}V = 0$ a tedy nulová práce. V případě balónku se ale objem změní, práce nulová nebude a proto se dodaná tepla musí lišit.

Zpět k příkladu. Protože máme pevnou láhev, podle vsuvky bude změna vnitřní energie rovna dodanému teplu. Využijeme tedy rovnice (49), kde $s = 5$ (protože CO má dvouatomové molekuly) a za nR_m dosadíme ze stavové rovnice $pV = nR_\mathrm{m}T$:

$$\Delta U = \Delta Q = \frac{s}{2} nR_\mathrm{m}\Delta T = \frac{5}{2}\frac{pV}{T}\Delta T\,.$$

Nyní už jen vyjádříme ΔT:

$$\Delta T = \frac{2}{5}\frac{T}{pV}\Delta Q = \frac{2}{5}\cdot\frac{30 + 273,15}{1,013\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-1}}\cdot 10\cdot 10^3\,\mathrm{K} \doteq 59,85\,\mathrm{K}\,.$$

K určení konečného tlaku plynu (b) už vyjdeme pouze ze stavové rovnice:

$$p_1V = nR_\mathrm{m}T_1 \quad\rightarrow\quad \frac{nR_\mathrm{m}}{V} = \frac{p_1}{T_1}\,,$$
$$p_2V = nR_\mathrm{m}T_2 \quad\rightarrow\quad \frac{nR_\mathrm{m}}{V} = \frac{p_2}{T_2}\,.$$

Dostaneme:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad\rightarrow\quad p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 = \frac{59,85 + 30 + 273,15}{30 + 273,15}\cdot 1,013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \doteq 1,21\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\,.$$

Příklad 9-118 (♣). Ideální tepelný stroj s maximální účinností 65 % má teplotu ohřívače 2 200 °C. Vypočítejte teplotu chladiče.

Získáme přímo ze vztahu pro účinnost:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$
$$T_2 = T_1(1-\eta) = 2\,473,15\cdot(1 - 0,65) \doteq 865,6\,\mathrm{K}$$

Příklad 9-119 (♣). Jaké teplo je třeba dodat 4 molům ideálního dvouatomového plynu, aby se jeho teplota a) při stálém tlaku zvýšila o 60 K? b) O kolik se při tom změní jeho vnitřní energie? c) Jakou práci plyn vykoná?

Dosud jsme se úspěšně vyhýbali tepelným kapacitám, nicméně teď je zmíníme. Je užitečné si pamatovat dva vztahy: pro molární tepelnou kapacitu při stálém objemu a při stálém tlaku:

$$C_{\mathrm{m}V} = \frac{s}{2}R_\mathrm{m}\,,\quad C_{\mathrm{m}p} = \frac{s+2}{2}R_\mathrm{m}\,. \tag{52}$$

Druhý z nich hned použijeme při řešení úkolu (a):

$$Q = nC_{\mathrm{m}p}\Delta T = n\frac{s+2}{2}R_\mathrm{m}\Delta T = 4\cdot\frac{5+2}{2}\cdot 8,314\cdot 60\,\mathrm{J} = 6\,983,76\,\mathrm{J}\,.$$

Potřebný vztah k vyřešení úkolu (b) jsme si odvodili, rce. (49):

$$\Delta U = \frac{s}{2} n R_{\mathrm{m}} \Delta T = \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot 8,314 \cdot 60\,\mathrm{J} = 4\,988,4\,\mathrm{J}\,.$$

c) Práce při $p =$ konst. je triviální (nakreslete si $p - V$ diagram):

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p(V_2 - V_1)\,. \tag{53}$$

Rozdíl objemů vyjádříme ze stavové rovnice:

$$pV_1 = nR_{\mathrm{m}}T_1 \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{nR_{\mathrm{m}}T_1}{p}\,,$$
$$pV_2 = nR_{\mathrm{m}}T_2 \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{nR_{\mathrm{m}}T_2}{p}\,.$$

Rovnice od sebe odečteme:

$$V_2 - V_1 = \frac{nR_{\mathrm{m}}}{p}(T_2 - T_1) = \frac{nR_{\mathrm{m}}}{p}\Delta T$$

a dosadíme do vztahu pro práci:

$$W = p\frac{nR_{\mathrm{m}}}{p}\Delta T = nR_{\mathrm{m}}\Delta T = 4 \cdot 8,314 \cdot 60\,\mathrm{J} = 1\,995,36\,\mathrm{J}\,.$$

(Správnost si zkuste ověřit dosazením odvozených vztahů do 1. zákona termodynamiky.)

Poznámka. Pokud bychom řešili úlohu při konstantním objemu (a tedy použili $C_{\mathrm{m}V}$), dostali bychom pro dodané teplo

$$Q = nC_{\mathrm{m}V}\Delta T = n\frac{s}{2}R_{\mathrm{m}}\Delta T\,,$$

tedy opět vztah (49) pro vnitřní energii, což potvrzuje naši úvahu ve vsuvce výše.

Příklad 9-120 (♣). Za normálního tlaku 10^5 Pa měl plynný dusík N_2 o látkovém množství 8 molů teplotu 40 °C. Teplota plynu byla při konstantním tlaku zvětšena na 80 °C. Určete:

a) změnu vnitřní energie plynu,

b) práci vykonanou plynem,

c) teplo plynu předané.

Řešení je stejné jako u předchozího příkladu:

$$\Delta U = \frac{s}{2}nR_{\mathrm{m}}\Delta T = \frac{5}{2} \cdot 8 \cdot 8,314 \cdot 40\,\mathrm{J} = 6\,651,2\,\mathrm{J}$$
$$W = nR_{\mathrm{m}}\Delta T = 8 \cdot 8,314 \cdot 40\,\mathrm{J} = 2\,660,48\,\mathrm{J}$$
$$Q = n\frac{s+2}{2}R_{\mathrm{m}}\Delta T = 8 \cdot \frac{5+2}{2} \cdot 8,314 \cdot 40\,\mathrm{J} = 9\,311,68\,\mathrm{J}$$

10 Elektrostatické pole

Příklad 10-121 (♣). Dva bodové náboje $Q_1 = -5\,\mathrm{nC}$ a $Q_2 = 2\,\mathrm{nC}$ jsou umístěny ve vakuu ve vzdálenosti 12 cm.

a) Jakou silou budou na sebe působit?

b) Jakou silou budou na sebe působit, jestliže se dotknou a pak se oddálí do původní vzdálenosti?

a)

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0,12^2}\,\mathrm{N} = -6,241 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$$

b) po dotyku:

$$Q_1' = Q_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{-5+2}{2}\,\mathrm{nC} = -1,5\,\mathrm{nC}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1'Q_2'}{d^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-9} \cdot 1,5 \cdot 10^{-9}}{0,12^2}\,\mathrm{N} = +1,404 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$$

Příklad 10-122 (♣). Vypočítejte velikost intenzity elektrického pole v bodě, který leží ve vzduchu

a) ve vzdálenosti 20 cm od bodového náboje 4 nC,

b) mezi dvěma rovnoběžnými deskami s potenciálovým rozdílem 60 V vzdálených 30 cm od sebe,

c) uprostřed na spojnici dvou nábojů $Q_1 = 3\,\mathrm{nC}$ a $Q_2 = 5\,\mathrm{nC}$ vzdálených od sebe 12 cm.

a)

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{0,20^2}\,\mathrm{N \cdot C^{-1}} = 898,8\,\mathrm{N \cdot C^{-1}}$$

b)

$$E = \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{60}{0,3}\,\mathrm{N \cdot C^{-1}} = 200\,\mathrm{N \cdot C^{-1}} = 200\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

c)

$$E = |E_1 - E_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left|\frac{Q_1}{r_1^2} - \frac{Q_2}{r_2^2}\right| = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \left|\frac{3 \cdot 10^{-9}}{0,06^2} - \frac{5 \cdot 10^{-9}}{0,06^2}\right|\,\mathrm{N \cdot C^{-1}} =$$
$$= 4\,993\,\mathrm{N \cdot C^{-1}}$$

Příklad 10-123 (♣). Dva souhlasné náboje $Q_1 = 8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ a $Q_2 = 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ se nacházejí ve vzdálenosti $d = 0,2\,\mathrm{m}$. Vypočítejte, v kterém místě na jejich spojnici je intenzita jejich výsledného elektrického pole nulová. Oba náboje se nalézají ve stejném prostředí.

Příklad analogický k tomuto jsme řešili v kapitole Gravitační pole. Nebudeme porovnávat velikosti elektrostatických sil na fiktivně vložený náboj, ale porovnáme přímo intenzity elektrických polí obou nábojů $E_1 = E_2$. Přitom označíme: x – vzdálenost místa nulové intenzity el. pole od Q_1, d – vzdálenost Q_1 a Q_2, $(d-x)$ – vzdálenost místa nulové intenzity el. pole od Q_2. Máme:

$$\begin{aligned} k\frac{Q_1}{x^2} &= k\frac{Q_2}{(d-x)^2} \\ \frac{(d-x)^2}{x^2} &= \frac{Q_2}{Q_1} \\ \frac{d^2 - 2dx + x^2}{x^2} &= \frac{Q_2}{Q_1} \\ \left(\frac{d}{x}\right)^2 - 2\frac{d}{x} + 1 &= \frac{Q_2}{Q_1} \end{aligned}$$

Zavedeme substituci $\xi = d/x$ a označíme $\alpha = 1 - Q_2/Q_1$:

$$\xi^2 - 2\xi + \alpha = 0\,.$$

Řešení:

$$\xi_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\alpha}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}\,.$$

Dosadíme z5:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}} = \frac{0,2}{1 + \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}}}} \doteq 0,112\,\mathrm{m} \\ x_2 &= \frac{d}{1 - \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}} = \frac{0,2}{1 - \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}}}} \doteq 0,955\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Hledané řešení je $x = x_1$. Má nějaký fyzikální význam řešení $x = x_2$?

Příklad 10-124 (♣). Dva stejné bodové náboje jsou umístěné ve vakuu ve vzdálenosti 20 cm. V jaké vzdálenosti musí být v oleji, jehož relativní permitivita je rovna 5, aby se nezměnila velikost elektrostatické síly působící mezi nimi?

$$F_\mathrm{v} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{r_\mathrm{v}^2}\,, \quad F_\mathrm{o} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{QQ'}{r_\mathrm{o}^2}$$

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{v} &= F_\mathrm{o}\\
\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{r_\mathrm{v}^2} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{QQ'}{r_\mathrm{o}^2}\\
\frac{1}{r_\mathrm{v}^2} &= \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{1}{r_\mathrm{o}^2}
\end{aligned}
$$

Vzdálenost v oleji:

$$
r_\mathrm{o} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} r_\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 20\,\mathrm{cm} \doteq 8,944\,\mathrm{cm}\,.
$$

Příklad 10-125 (♣). Vypočítejte kapacitu deskového kondenzátoru, jestliže plošný obsah desky je $50\,\mathrm{cm}^2$, vzdálenost desek je $3\,\mathrm{mm}$ a prostor mezi deskami je vyplněn dielektrikem o $\varepsilon_r = 3$.

$$
C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d} = 8,854\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot \frac{50\cdot 10^{-4}}{3\cdot 10^{-3}}\,\mathrm{F} = 4,427\cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} = 44,27\,\mathrm{pF}
$$

Příklad 10-126 (♣). K dispozici máme tři nenabité kondenzátory o kapacitách $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 3\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = 5\,\mu\mathrm{F}$. Vypočítejte jejich výslednou kapacitu, jestliže:

a) kondenzátory jsou zapojeny paralelně,

b) kondenzátory jsou zapojeny sériově.

a)

$$
C_\mathrm{P} = C_1 + C_2 + C_3 = 2\,\mu\mathrm{F} + 3\,\mu\mathrm{F} + 5\,\mu\mathrm{F} = 10\,\mu\mathrm{F}
$$

b)

$$
\frac{1}{C_\mathrm{S}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_2C_3 + C_3C_1 + C_1C_2}{C_1C_2C_3}
$$

$$
C_\mathrm{S} = \frac{C_1C_2C_3}{C_2C_3 + C_3C_1 + C_1C_2} = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 5 + 5\cdot 2 + 2\cdot 3}\,\mu\mathrm{F} = \frac{30}{31}\,\mu\mathrm{F}
$$

Příklad 10-127 (♣). K dispozici máme tři nenabité kondenzátory o kapacitách $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 3\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = 5\,\mu\mathrm{F}$ připojené ke zdroji napětí $12\,\mathrm{V}$. Vypočítejte jejich výslednou kapacitu a náboj a napětí na jednotlivých kondenzátorech, jestliže kondenzátory jsou zapojeny paralelně.

Kapacita:

$$
C_\mathrm{P} = C_1 + C_2 + C_3 = 2\,\mu\mathrm{F} + 3\,\mu\mathrm{F} + 5\,\mu\mathrm{F} = 10\,\mu\mathrm{F}
$$

Náboj na jednotlivých kondenzátorech (paralelní zapojení: na každém kondenzátoru je napětí 12 V):

$$Q_1 = UC_1 = 12\,\text{V} \cdot 2\,\mu\text{F} = 24\,\mu\text{C}$$
$$Q_2 = UC_2 = 36\,\mu\text{C}$$
$$Q_3 = UC_3 = 60\,\mu\text{C}$$

Příklad 10-128 (♣). K dispozici máme tři nenabité kondenzátory o kapacitách $C_1 = 2\,\mu$F, $C_2 = 3\,\mu$F, $C_3 = 5\,\mu$F připojené ke zdroji napětí 12 V. Vypočítejte jejich výslednou kapacitu a náboj a napětí na jednotlivých kondenzátorech, jestliže kondenzátory jsou zapojeny sériově.

Kapacita:

$$\frac{1}{C_\mathrm{S}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad C_\mathrm{S} = \frac{30}{31}\,\mu\text{F}$$

Náboj je na všech kondenzátorech stejný:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q}{C_\mathrm{S}} \quad \Rightarrow \quad Q = UC_\mathrm{S} = 12 \cdot \frac{30}{31}\,\mu\text{C} = 11{,}613\,\mu\text{C}$$

Odtud plynou napětí:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{11{,}613}{2}\,\text{V} = 5{,}8\,\text{V}$$
$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{11{,}613}{3}\,\text{V} = 3{,}9\,\text{V}$$
$$U_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{11{,}613}{5}\,\text{V} = 2{,}3\,\text{V}$$

Příklad 10-129 (♣). Ke dvěma paralelně spojeným kondenzátorům připojíme třetí do série. Všechny kondenzátory jsou stejné a mají obdélníkové desky o rozměru 50 cm × 30 cm vzdálené od sebe 3 mm. Určete celkovou kapacitu zapojení kondenzátorů.

$$\frac{1}{C_\mathrm{celk}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C+C} = \frac{2+1}{2C} = \frac{3}{2C} \quad \Rightarrow \quad C_\mathrm{celk} = \frac{2}{3}C$$

$$C_\mathrm{celk} = \frac{2}{3}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d} = \frac{2}{3} \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \frac{50 \cdot 30 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-3}}\,\text{F} = 2{,}951 \cdot 10^{-10}\,\text{F} = 295\,\text{pF}$$

11 Elektrický proud

Příklad 11-130 (♣). Galvanický článek s vnitřním odporem $0,2\,\Omega$ má elektromotorické napětí $1,8\,\mathrm{V}$. Vypočítejte proud tekoucí obvodem a svorkové napětí, jestliže je článek připojen k vnějšímu odporu $0,7\,\Omega$.

Celkový odpor:

$$R_{\mathrm{celk}} = R_i + R\,.$$

Z Ohmova zákona (U_e – elektromotorické napětí):

$$I = \frac{U_e}{R_{\mathrm{celk}}} = \frac{U_e}{R_i + R} = \frac{1,8}{0,2+0,7}\,\mathrm{A} = 2\,\mathrm{A}\,.$$

Svorkové napětí je potom elektromotorické ponížené o úbytek napětí na vnitřním odporu:

$$U = U_e - IR_i = (1,8 - 2\cdot 0,2)\,\mathrm{V} = 1,4\,\mathrm{V}\,.$$

Příklad 11-131 (♣). Elektromotorické napětí akumulátoru je $36\,\mathrm{V}$. Připojíme-li k němu spotřebič, poklesne napětí na svorkách akumulátoru na $20\,\mathrm{V}$, přičemž spotřebičem prochází proud $4\,\mathrm{A}$. Určete vnitřní odpor akumulátoru.

Jako v předchozím příkladu bude

$$U = U_e - IR_i\,.$$

Vyjádříme R_i:

$$R_i = \frac{U_e - U}{I} = \frac{36-20}{4}\,\Omega = 4\,\Omega\,.$$

Příklad 11-132 (♣). Jestliže z baterie odebíráme proud $3\,\mathrm{A}$, je svorkové napětí $24\,\mathrm{V}$. Při odběru proudu $4\,\mathrm{A}$ klesne svorkové napětí na $20\,\mathrm{V}$. Vypočítejte vnitřní odpor baterie a elektromotorické napětí baterie.

Hledáme lineární funkci $U_s = f(I)$ viz obr. 2. Bude tedy ve tvaru:

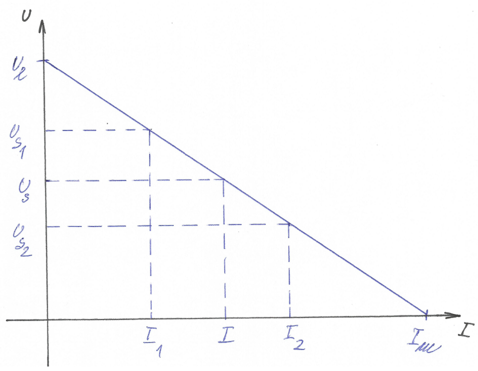
$$U_s = a\cdot I + b\,.$$

Parametr b bude zřejmě elektromotorické napětí baterie $b = U_e$, jak je patrné z obrázku (napětí bez zátěže: $I = 0$). Dále $a = -R_i$ (vnitřní odpor baterie) – platí Ohmův zákon. Máme:

$$U_s = -R_i\cdot I + U_e\,.$$

Dosadíme zadané hodnoty:

$$24 = -3R_i + U_e$$
$$20 = -4R_i + U_e$$



Obrázek 2: Charakteristika baterie.

Řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých. První rovnici přenásobíme 4, druhou 3 a odečteme od první. Dostaneme přímo elektromotorické napětí baterie:

$$U_e = 36\,\mathrm{V}\,.$$

Dosazením U_e do jedné z obou rovnic, dostaneme vnitřní odpor baterie:

$$R_i = 4\,\Omega\,.$$

Příklad 11-133 (♣). Ke zdroji stálého napětí 6 V jsou paralelně připojeny odpory 20 Ω a 30 Ω. Určete celkový proud a proud tekoucí jednotlivými odpory v pořadí, jak jsou odpory zadány.

Při paralelním zapojení odporů:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U = \frac{1}{R} U\,.$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{6}{20}\,\mathrm{A} = 0,3\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{6}{30}\,\mathrm{A} = 0,2\,\mathrm{A}$$

$$I = I_1 + I_2 = (0,3 + 0,2)\,\mathrm{A} = 0,5\,\mathrm{A}$$

Příklad 11-134 (♣). Drát dlouhý 4 m o průměru 6 mm má odpor 15 mΩ a je k němu přiloženo napětí 23 V. Určete: a) Jaká je hustota proudu v drátu? b) Vypočtěte rezistivitu materiálu drátu.

(a) Proudová hustota:

$$J = \frac{I}{S_\perp} = \frac{U/R}{\pi d^2/4} = \frac{23/(15\cdot 10^{-3})}{\pi\cdot(6\cdot 10^{-3})^2/4}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2} \doteq 5,42\cdot 10^7\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2}\,.$$

(b) Rezistivita:

$$R = \rho\frac{l}{S} \quad\rightarrow\quad \rho = R\frac{S}{l} = \rho\frac{\pi d^2/4}{l} = 15\cdot 10^{-3}\cdot\frac{\pi\cdot(6\cdot 10^{-3})^2/4}{4}\,\Omega\cdot\mathrm{m} \doteq 1,06\cdot 10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m}\,.$$

Příklad 11-135 (♣). Dva rezistory s odpory $2\,\Omega$ a $4\,\Omega$ jsou zapojeny sériově. Další dva rezistory s odpory $3\,\Omega$ a $1\,\Omega$ jsou zapojeny také sériově. Obě větve rezistorů jsou spojeny paralelně a zapojené ke zdroji stejnosměrného napětí ($U_\mathrm{e} = 6\,\mathrm{V}$, $R_\mathrm{i} = 0,2\,\Omega$). Vypočítejte proudy procházející jednotlivými větvemi.

Nejprve můžeme určit celkový odpor zapojení rezistorů:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{(2+4) \cdot (3+1)}{2+4+3+1}\,\Omega = 2,4\,\Omega$$

Máme zadán vnitřní odpor zdroje, takže celkový odpor bude:

$$R_\mathrm{celk} = R_i + R = (0,2 + 2,4)\,\Omega = 2,6\,\Omega\,.$$

Nyní můžeme určit proud (z elektromotorického napětí):

$$I = \frac{U_e}{R_\mathrm{celk}} = \frac{6}{2,6}\,\mathrm{A} = \frac{30}{13}\,\mathrm{A}\,.$$

Tento proud se dělí mezi větve v opačném poměru jejich odporů (označíme odpory větví R_A a R_B v pořadí jako v první rovnici). Ty si nejprve spočteme:

$$R_\mathrm{A} = R_1 + R_2 = (2+4)\,\Omega = 6\,\Omega\,,$$
$$R_\mathrm{B} = R_3 + R_4 = (3+1)\,\Omega = 4\,\Omega\,.$$

Víme, že (paralelní zapojení větví):

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_\mathrm{A}} + \frac{U}{R_\mathrm{B}} = U\left(\frac{1}{R_\mathrm{A}} + \frac{1}{R_\mathrm{B}}\right) = U\frac{R_\mathrm{B} + R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A}R_\mathrm{B}}\,.$$

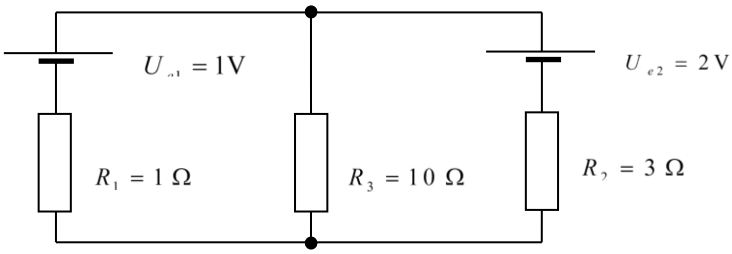
Tuto rovnice můžeme pro názornost ještě přepsat:

$$\frac{I}{R_\mathrm{B} + R_\mathrm{A}} = \frac{U}{R_\mathrm{A}R_\mathrm{B}}\,.$$

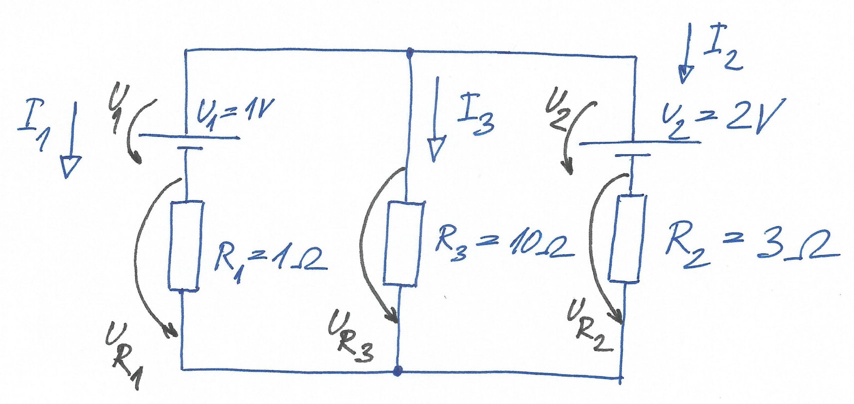
Když teď za U dosadíme jednoduše $I_1 R_\mathrm{A}$ a $I_2 R_\mathrm{B}$, můžeme vždy hledaný proud přímo vyjádřit. Výraz vlevo je právě poměr I_1/R_B nebo I_2/R_A ($I_1/I_2 = R_\mathrm{B}/R_\mathrm{A}$). Tedy:

$$I_1 = \frac{R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B} + R_\mathrm{A}} \cdot I = \frac{4}{4+6} \cdot \frac{30}{13}\,\mathrm{A} \doteq 0,923\,\mathrm{A}\,,$$
$$I_2 = \frac{R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{B} + R_\mathrm{A}} \cdot I = \frac{6}{4+6} \cdot \frac{30}{13}\,\mathrm{A} \doteq 1,385\,\mathrm{A}\,.$$

Příklad 11-136 (♣). Sestavte a zapište pro obvod na obrázku 3 rovnice pro řešení podle I. a II. Kirchhoffova zákona a určete proudy tekoucí odpory R_1, R_2 a R_3.



Obrázek 3: Schéma zapojení.



Obrázek 4: K řešení.

$$
\begin{aligned}
&1) \quad U_1 + U_{R_1} - U_{R_3} = 0\\
&2) \quad U_1 + U_{R_1} - U_{R_2} - U_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1) \quad U_1 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 && \text{(II. Kirchhofův z.)}\\
&2) \quad U_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 - U_2 = 0 && \text{(II. Kirchhofův z.)}\\
&3) \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0 && \text{(I. Kirchhofův z.)}
\end{aligned}
$$

Soustavu rovnic zapíšeme maticově:

$$
\begin{pmatrix} R_1 & 0 & -R_3 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -U_1 \\ U_2 - U_1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Označíme $\mathbf{R}$ matici soustavy, $\mathbf{I}$ bude hledaná matice proudů a $\mathbf{U}$ pravá strana. Jestliže $\mathbf{R}$ je čtvercová regulární matice, tak má inverzi $\mathbf{R}^{-1}$, kterou můžeme násobit zleva a tak vyjádřit přímo matici proudů ($\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{E}$ je jednotková matice):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{U} \\ \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{I} &= \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U} \end{aligned}$$

Vyjádříme číselně (fyzikální rozměry teď vynecháme, neměli bychom na ně však zapomínat):

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinant matice $\mathbf{R}$ je

$$\det \mathbf{R} = -43\,,$$

takže je to skutečně regulární matice. Najdeme její inverzi (viz např. [7]):

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{R}} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{R} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{R}_{ji}}{\det \mathbf{R}} = \frac{1}{43} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 10 & 30 \\ 1 & -11 & 10 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zde $\mathbf{R}_{ji}$ je matice, která vznikla z původní matice $\mathbf{R} = (R_{ij})$ vynecháním j-tého řádku a i-tého sloupce. Nyní už můžeme jednoduše dopočítat jednotlivé proudy:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{43} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 10 & 30 \\ 1 & -11 & 10 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{A} = \frac{1}{43} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{A} = \begin{pmatrix} +0,163\,\mathrm{A} \\ -0,279\,\mathrm{A} \\ +0,116\,\mathrm{A} \end{pmatrix}$$

Protože proud I_2 má záporné znaménko, je orientovaný opačně než jsme si ho zavedli. Soustavu rovnic ale můžete řešit libovolně.☺

Část II
Fyzika II

12 Nejistoty nepřímého měření (advanced)

Tato kapitola volně navazuje na odstavec 2.2.2 ve Fyzice I.

Chceme-li určit nejistotu fyzikální veličiny y, kterou měříme nepřímo, tak musíme využít fyzikálního vztahu její závislosti na měřených veličinách $x_1, ..., x_n$. Na tento fyzikální vztah můžeme nahlížet jako na funkci více proměnných $y = f(x_1, ..., x_n)$. Pokud bychom chtěli určit, jak závisí malá změna ve funkční hodnotě y na malé změně měřených proměnných $x_1, ..., x_n$, tak takovouto změnu popisuje totální diferenciál

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \,. \tag{54}$$

Na nejistotu měření můžeme nahlížet jako na malou změnu v dané fyzikální veličině, a tudíž $u_y = \mathrm{d}y$ a $u_{x_i} = \mathrm{d}x_i$, kde $i = 1, ..., n$. Tento vztah se někdy používá pro zjednodušený výpočet nejistot měření. Není však úplně správný.

Ze statistiky vyplývá, že nejistoty se neskládají lineárně, ale kvadraticky, a platí tak

$$(\mathrm{d}y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\mathrm{d}x_1)^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 (\mathrm{d}x_n)^2 \,. \tag{55}$$

Tento vztah je náročnější odvodit, ale jeho použití není náročné, pokud známe derivace. Pokud dosadíme za malé změny veličin jejich nejistoty, dostaneme konečný tvar pro nejistotu

$$\boxed{u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 u_{x_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_i}^2}} \,. \tag{56}$$

Tomuto vztahu se říká **zákon šíření chyb (nejistot)**.

Většinu fyzikálních vztahů můžeme popsat pomocí dvou důležitých funkcí. Podíváme se, co ze zákona šíření chyb vyjde pro nejistoty těchto dvou funkcí.

1. Funkce $y = ax_1 + bx_2$. Pro výpočet nejistoty je třeba určit derivace funkce podle jejich proměnných, tedy $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = a$ a $\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = b$. Tyto derivace dosadíme do vztahu (56) a dostaneme pro nejistotu

$$u_y = \sqrt{a^2 u_{x_1}^2 + b^2 u_{x_2}^2} \,. \tag{57}$$

2. Funkce $y = ax_1^m x_2^n$. Pro výpočet nejistoty je třeba určit derivace funkce podle jejich proměnných, tedy $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = amx_1^{m-1}x_2^n$ a $\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = anx_1^m x_2^{n-1}$. Tyto derivace dosadíme

do vztahu (56) a dostaneme pro nejistotu

$$
\begin{aligned}
u_y &= \sqrt{\left(amx_1^{m-1}x_2^n\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(anx_1^m x_2^{n-1}\right)^2 u_{x_2}^2} \\
u_y &= \sqrt{a^2m^2x_1^{2m-2}x_2^{2n}u_{x_1}^2 + a^2n^2x_1^{2m}x_2^{2n-2}u_{x_2}^2} \\
u_y &= ax_1^m x_2^n\sqrt{m^2x_1^{-2}u_{x_1}^2 + n^2x_2^{-2}u_{x_2}^2} \\
\frac{u_y}{ax_1^m x_2^n} &= \sqrt{m^2\frac{u_{x_1}^2}{x_1^2} + n^2\frac{u_{x_2}^2}{x_2^2}} \\
\frac{u_y}{y} &= \sqrt{m^2\frac{u_{x_1}^2}{x_1^2} + n^2\frac{u_{x_2}^2}{x_2^2}} \\
u_{\mathrm{r}y} &= \sqrt{m^2u_{\mathrm{r}x_1}^2 + n^2u_{\mathrm{r}x_2}^2}\,,
\end{aligned}
\tag{58}
$$

kde jsme použili definici relativní nejistoty $u_{\mathrm{r}y} = u_y/y$.

Tento způsob na následujícím příkladu srovnáme s tím, co jsme se učili ve Fyzice I:

Příklad 12-137 (⧫). Určete odpor spotřebiče a jeho nejistotu z jednoho měření proudu a napětí. Hodnota proudu je $I = (99,78 \pm 0,28)\,\mathrm{mA}$ a napětí $U = (238,9 \pm 1,1)\,\mathrm{V}$.

Určíme nejprve odpor spotřebiče:

$$
R = \frac{U}{I} = \frac{238,9\,\mathrm{V}}{0,099\,78\,\mathrm{A}} = 2\,394,27\,\Omega\,.
$$

Ze zákona šíření nejistot (56) dostaneme nejistotu odporu jako

$$
\begin{aligned}
u_R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 u_I^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u_U^2 + \left(-\frac{U}{I^2}\right)^2 u_I^2} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{0,099\,78^2}\cdot 1,1^2 + \frac{238,9^2}{0,099\,78^4}\cdot 0,000\,28^2}\,\Omega \doteq 13\,\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Zapíšeme výsledek:

$$
R = (2\,394 \pm 13)\,\Omega\,.
$$

Rozeberme nyní postup, který jsme se učili v minulém semestru. Museli jsme si nejprve uvědomit, že vztah pro výpočet nepřímo měřené veličiny, R, je typu $y = ax_1^m x_2^n$ a podle toho jsme specificky přistupovali k výpočtu nejistot. V tomto případě jsme museli nejprve spočítat relativní nejistotu nepřímo měřené veličiny (odporu), která vypadala takto:

$$
u_{\mathrm{r}R} = \frac{u_R}{R} = \sqrt{1^2u_{\mathrm{r}U}^2 + (-1)^2u_{\mathrm{r}I}^2}\,.
$$

Zkusme vztah upravit. Vyjádříme u_R tak, že druhou rovnost přenásobíme R a rozepíšeme relativní nejistoty přímo měřených veličin:

$$u_R = R\sqrt{\left(\frac{u_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{u_I}{I}\right)^2} = \sqrt{R^2\left(\frac{u_U}{U}\right)^2 + R^2\left(\frac{u_I}{I}\right)^2}\,.$$

Dále můžeme upravit členy pod odmocninou využitím Ohmova zákona. V prvním členu dosadíme za $R/U = 1/I$ a ve druhém dosadíme za $R = U/I$, dostaneme:

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u_U^2 + \left(\frac{U}{I^2}\right)^2 u_I^2}\,.$$

Vidíme, že výsledný vztah absolutní nejistoty nepřímo měřené veličiny, R, je úplně stejný. Protože už umíme derivovat, můžeme „poučky“ na výpočty nejistot nepřímo měřených veličin zapomenout. Jsou totiž přirozeně „obsaženy“ ve vztahu (56), který nám navíc umožňuje vyhodnotit nejistoty nepřímo měřených veličin daných libovolnou kombinací libovolných funkcí přímo měřených veličin.

12.1 Příklady: nejistoty nepřímého měření (advanced)

Příklad 12-138 (♣). Určete objem krychle a jeho nejistotu. Hrana krychle byla jednou měřena posuvným měřítkem a je $a = 2,715\,\mathrm{cm}$.

Objem krychle:

$$V = a^3 = 2,715^3\,\mathrm{cm}^3 \doteq 20,012\,9\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Nejistota objemu:

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 u_a^2} = \frac{\partial V}{\partial a}u_a = 3a^2\,\frac{m_a}{\sqrt{3}} = 3\cdot 2,715^2\cdot\frac{0,01}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}^3 \doteq 0,13\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Výsledek:

$$V = (20,01 \pm 0,13)\,\mathrm{cm}^3\,.$$

(Tady pozor, chybu měření jsem dosadil v centimetrech: $m_a = 0,01\,\mathrm{cm}$.)

Příklad 12-139 (♣). Určete obecný vztah pro nejistotu funkce $\omega = \sqrt{\Omega^2 - 2b^2}$.

$$\frac{\partial\omega}{\partial\Omega} = \frac{1}{2}(\Omega^2 - 2b^2)^{-1/2}2\Omega = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 2b^2}}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial b} = \frac{1}{2}(\Omega^2 - 2b^2)^{-1/2}4b = \frac{2b}{\sqrt{\Omega^2 - 2b^2}}$$

$$u_\omega = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_i}^2} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 2b^2}u_\Omega^2 + \frac{4b^2}{\Omega^2 - 2b^2}u_b^2}$$

13 Magnetické pole

Příklad 13-140 (♣). V pracovní komoře cyklotronu o poloměru 1,2 m se pohybují protony. Magnetická indukce má velikost 0,45 T. Určete maximální rychlost protonů a cyklotronovou frekvenci.

Příklad 13-141 (♣). Určete velikost indukce magnetického pole B nekonečného přímého vodiče, kterým prochází proud I ve vzdálenosti R od vodiče.

Příklad 13-142 (♣). Stanovte proud, který teče velmi dlouhým tenkým přímým vodičem, když ve vzdálenosti 0,2 m od něj byla zjištěna velikost magnetické indukce $5 \cdot 10^{-4}$ T. Vodič se nalézá ve vzduchu.

Příklad 13-143 (♣). Dvěma rovnoběžnými vodiči ve vzájemné vzdálenosti 10 cm procházejí proudy 10 A a 20 A. Určete velikost a směr magnetické síly, která působí na 1 m délky vodičů, jestliže oba proudy mají a) stejný směr, b) opačný směr.

Příklad 13-144 (♣). Na přímý vodič délky 12 cm, kterým prochází proud 2,5 A, působí v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí 0,2 T síla 22 mN. Určete úhel, který svírá vodič se směrem magnetických indukčních čar.

14 Elektromagnetické pole

Příklad 14-145 (♣). Válcovou cívkou se 120 závity prochází proud 7,5 A. Magnetický indukční tok v dutině cívky je 2,3 mWb. Vypočítejte energii magnetického pole cívky.

$$\Phi_1 = 2,3\,\mathrm{mWb} = 2,3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb}$$

$$\Phi = N\Phi_1 = LI \Rightarrow L = \frac{N\Phi_1}{I}$$

$$W_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{N\Phi_1}{\cancel{I}}I^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}N\Phi_1 I$$

$$W_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 2,3 \cdot 10^{-3} \cdot 7,5 = 1,035\,\mathrm{J}$$

Příklad 14-146 (♣). Indukčnost cívky o 500 závitech je 8 mH. Vypočtěte magnetický indukční tok cívkou, jestliže jí protéká proud 6 mA.

$$I = 6\,\mathrm{mA} = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$$
$$\Phi = LI = N\Phi_1 \Rightarrow \Phi_1 = \frac{LI}{N}$$
$$\Phi_1 = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{500} = 9,6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wb}$$

Příklad 14-147 (♣). V homogenním magnetickém poli umístíme rovinnou čtvercovou smyčku o straně 20 cm a odporu 20 mΩ tak, že magnetická indukce o velikosti 2 T je kolmá k rovině smyčky. Jestliže protáhneme smyčku tak, že dvě protilehlé se vzdálí a zbývající dvě přiblíží, zmenší se plocha smyčky. Za dobu 0,2 s zmenšíme plochu až na nulu. Jaké je
a) průměrné indukované elektromotorické napětí,
b) průměrný indukovaný proud ve smyčce během tohoto časového intervalu?

$$S \to 0 \text{ za } \Delta t = 0,2\,\mathrm{s}$$
$$u_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \doteq -B\frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$\Delta S = -0,2 \cdot 0,2 = -0,04\,\mathrm{m}^2$$
$$u_i = -B\frac{\Delta S}{\Delta t} = -2 \cdot \frac{-0,04}{0,2} = 0,4\,\mathrm{V}$$
$$i_i = \frac{u_i}{R} = \frac{0,4}{20 \cdot 10^{-3}} = 20\,\mathrm{A}$$

Příklad 14-148 (♣). Čtvercový závit o straně 50 mm se nachází v magnetickém poli a jeho rovina svírá s vektorem magnetické indukce úhel 30°. Jak velké napětí se indukuje v závitu, jestliže za dobu 0,3 s klesne velikost vektoru magnetické indukce o 0,6 T?

$$|u_i| = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot S \cdot \cos(90° - \alpha)$$
$$|u_i| = \frac{0,6}{0,3} \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot \cos(90° - 30°) = 2,5\,\mathrm{mV}$$

Příklad 14-149 (♣). Určete elektromotorické napětí, které se indukuje v cívce s vlastní indukčností 0,05 H, když v ní proud rovnoměrně klesne za 3 s z hodnoty 20 A na nulu.

$$U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \doteq -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$
$$U = -0,05 \cdot \frac{-20}{3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{V}$$

Příklad 14-150 (♣). Určete maximální elektromotorické napětí, které se může indukovat v rovinné cívce se 4 000 závity o středním poloměru 120 mm, rotující s frekvencí 30 Hz v zemském magnetickém poli o velikosti magnetické indukce $5 \cdot 10^{-5}$ T.

$$\omega = 2\pi f$$
$$\Phi = BNS\,\sin(\omega t)$$
$$U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\omega BNS\,\cos(\omega t)$$
$$U_{\mathrm{max}} = \omega BNS$$
$$U_{\mathrm{max}} = 2 \cdot \pi \cdot 30 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 4\,000 \cdot \pi \cdot 0,12^2 = 1,705\,\mathrm{V}$$

Příklad 14-151 (♣). Dva solenoidy jsou částí indukční cívky v automobilu. Jestliže proud solenoidem klesne z 6 A na nulu za 2,5 ms, indukuje se na druhém solenoidu elektromotorické napětí 30 kV. Jaká je jejich vzájemná indukčnost?

$$I_1 = 6\,\mathrm{A} \rightarrow 0\,\mathrm{A}\ \text{za}\ 2,5\,\mathrm{ms}$$
$$U_i = 30\,\mathrm{kV}$$
$$M = ?$$
$$U_i = M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \quad U_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$
$$M = \frac{U_i}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}$$
$$M = \frac{30 \cdot 10^3\,\mathrm{V}}{\frac{(0-6)\,\mathrm{A}}{2,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}}} = \frac{30 \cdot 10^6\,\mathrm{V} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}}{-6\,\mathrm{A}} = \frac{30 \cdot 2,5}{6} \cdot \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A}} = 13,5\,\mathrm{H}$$

Příklad 14-152 (♣). Dvě cívky mají vůči sobě pevnou polohu. Jestliže 1. cívkou proud neteče a proud 2. cívkou roste rychlostí 15,0 A/s, na 1. cívce vzniká elektromagnetické napětí 25,0 mV. Určete:
a) Jaká je vzájemná indukčnost cívek?
b) Když poteče 2. cívkou nulový proud a 1. cívkou proud 3,60 A, jaký je celkový

magnetický tok 2. cívkou?

a)

$$U_{i1} = M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \Rightarrow M = \frac{U_{i1}}{\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}} = \frac{25,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}}{15\,\mathrm{A/s}} = 1,666 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}$$

b)

$$\Phi_2 = M\Phi_1 = 1,666 \cdot 10^{-3} \cdot 3,60\,\mathrm{A} = 6,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb}$$

Příklad 14-153 (♣). Oscilační obvod se skládá z cívky vlastní indukčnosti 0,07 H a deskového kondenzátoru, jehož každá deska má plošný obsah 0,45 m^2. Prostor mezi deskami, jejichž vzdálenost je 0,1 mm, je vyplněn parafínovým papírem s relativní permitivitou 2. Vypočítejte periodu vlastních kmitů T obvodu, je-li elektrický odpor obvodu zanedbatelný.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$C = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{S}{d}$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0,07 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot \frac{0,45}{10^{-4}}}\,\mathrm{s} = 4,693 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$$

Příklad 14-154 (♣). Amplituda střídavého napětí je 300 V. Kmitočet 50 Hz. Za jak dlouho po projití nulovou polohou dosáhne okamžité napětí hodnoty 30 V?

Příklad 14-155 (♣). Oscilační obvod se skládá z cívky o indukčnosti 0,1 H a kondenzátoru o kapacitě 20 μF. Při kmitech obvodu dosahuje maximální napětí na kondenzátoru hodnoty 4 V.
a) Napište rovnici popisující závislost okamžité hodnoty napětí kondenzátoru na čase.
b) Určete energii elektrického pole kondenzátoru a energii magnetického pole cívky v okamžiku, kdy je napětí na kondenzátoru nulové.

a)

$$u = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = 707,107\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$u = 4 \cdot \sin(707,107 \cdot t)\,\mathrm{V}$$

b)

$$W_C = \frac{1}{2}CU_C^2$$

$$U_C = 0 \Rightarrow W_C = 0$$

$$W_{C,\,\max} = W_{L,\,\max}$$

$$W_{C,\,\max} = \frac{1}{2}CU_{C,\,\max}^2 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10^{-6}\cdot 4^2 = 1,6\cdot 10^{-4}\,\mathrm{J} = W_{L,\,\max} = W_L(U_C = 0)$$

Příklad 14-156 (♣). Sériový obvod střídavého proudu je tvořen rezistorem o odporu 90 Ω, cívkou o indukčnosti 1,3 H a kondenzátorem o kapacitě 10 μF. Obvod je připojen ke zdroji střídavého napětí o amplitudě 100 V a frekvenci 50 Hz. Napište rovnice pro okamžité hodnoty napětí a proudu v obvodu, jestliže počáteční fáze proudu je nulová.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\cdot\pi\cdot 50 = 100\pi = 314,16\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 100\pi\cdot 1,3 = 408,407\,\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{100\pi\cdot 10^{-5}} = \frac{1}{10^{-3}\pi} = \frac{1000}{\pi} = 318,31\,\Omega$$

$$Z = \sqrt{90^2 + (408,407 - 318,31)^2} = 127,348\,\Omega$$

$$I_\mathrm{m} = \frac{U_\mathrm{m}}{Z} = \frac{100\,\mathrm{V}}{127,348\,\Omega} = 0,785\,25\,\mathrm{A}$$

$$U_{\mathrm{m}R} = R\cdot I_\mathrm{m} = 90\cdot 0,785\,25 = 70,673\,\mathrm{V}$$

$$U_L = X_L\cdot I_\mathrm{m} = 408,407\cdot 0,785\,25 = 320,702\,\mathrm{V}$$

$$U_C = X_C\cdot I_\mathrm{m} = 318,31\cdot 0,785\,25 = 249,953\,\mathrm{V}$$

$$U = \sqrt{U_{\mathrm{m}R}^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{70,673^2 + (320,702 - 249,953)^2} = 100,000\,4\,\mathrm{V}$$

15 Geometrická (paprsková) optika

Příklad 15-157 (♣). Index lomu ledu je 1,31, vody 1,33, oleje 1,47, skla 1,51. Jaká je rychlost světla v uvedených prostředích?

Příklad 15-158 (♣). Žluté světlo sodíkové lampy dopadá ze vzduchu ($n = l$) na stěnu diamantu pod úhlem 60°; lomený paprsek je kolmý na odražený paprsek. Jaký je index lomu diamantu pro použité světlo?

Příklad 15-159 (♣). Bodový zdroj světla je ponořen 80 cm pod hladinou vody. Určete průměr kruhu na povrchu, ve kterém světlo vystupuje z vody.

Příklad 15-160 (♣). Index lomu benzenu je 1,8. Jaký je mezní úhel pro světelný paprsek procházející z benzenu směrem do vzduchu?

Příklad 15-161 (♣). Totální odraz v daném skleněném vlákně umístěném ve vzduchu nastává při úhlu 45°. Určete:

a) index lomu skla,

b) jak se změní tento úhel, jestliže vlákno ponoříme do vody o indexu lomu 1,33?

Příklad 15-162 (♣). Vypuklým zrcadlem byl získán zdánlivý a přímý obraz předmětu ve vzdálenosti 12 cm od vrcholu zrcadla. V jaké vzdálenosti je umístěn předmět, je-li poloměr křivosti zrcadla 40 cm?

16 Vlnová optika

17 Základy kvantové fyziky

18 Vlnová mechanika

19 Atomová fyzika

20 Fyzika atomového jádra

Reference

[1] Fundamental Physical Constants from NIST — physics.nist.gov. https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html. [Accessed 25-11-2023].

[2] Československý časopis pro fyziku. https://ccf.fzu.cz/. [Accessed: 19-11-2024].

[3] Sbírka řešených úloh. https://reseneulohy.cz/cs, 2006. [Accessed 11-12-2023].

[4] Budinská, Z., Ducháček, P., and Kohout, Z. *Fyzika II*, 1 ed. České vysoké učení technické v Praze, 2022.

[5] Budinská, Z., Ducháček, P., Kohout, Z., and Jílek, M. *Fyzika I*, 1 ed. České vysoké učení technické v Praze, 2022. 3. dotisk.

[6] Kohout, Z. *Laboratorní cvičení z fyziky*, 2 ed. České vysoké učení technické v Praze, 2007.

[7] Krajník, E. *Maticový počet*, 1 ed. České vysoké učení technické v Praze, 1998.

[8] Kulhánek, P. Fyzika I. https://www.aldebaran.cz/studium/f1.pdf, 2020. [Accessed 19-11-2024].

[9] Samek, L., Solar, M., and Chren, D. *Sbírka příkladů z Fyziky II.* České vysoké učení technické v Praze, 2018.

[10] Samek, L., and Vlčák, P. *Fyzika v příkladech II.* Academia, 2017.

[11] Samek, L., and Vlčák, P. *Sbírka příkladů z Fyziky I.* České vysoké učení technické v Praze, 2017.

[12] Samek, L., and Černý, F. *Fyzika v příkladech.* Academia, 2014.

[13] Williams, J. H. Guide to the expression of uncertainty in measurement (the GUM). In *Quantifying Measurement*, 2053-2571. Morgan & Claypool Publishers, 2016, pp. 6–1 to 6–9.

Část III
Dodatky

A Některé fyzikální konstanty

Tabulka 2: Výběr některých fyzikálních konstant [1]; způsob zápisu viz odstavec 2.2.4.

značka	název	číselná hodnota	jednotka
κ, G	gravitační konstanta	$6,674\,30(15) \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
g_0, g_n	normální tíhové zrychlení[5]	$9,806\,65$ (přesně)	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
k_B, k	Boltzmannova konstanta	$1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ (přesně)	$\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
N_A	Avogadrova konstanta	$6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ (přesně)	$\mathrm{mol^{-1}}$
$\hbar$	redukovaná Planckova konst.	$1,054\,571\,817... \cdot 10^{-34}$ (přesně)	$\mathrm{J \cdot s}$
ε_0	permitivita vakua	$8,854\,187\,812\,8(13) \cdot 10^{-12}$	$\mathrm{F \cdot m^{-1}}$
μ_0	permeabilita vakua	$1,256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{N \cdot A^{-2}}$
c	rychlost světla ve vakuu	$299\,792\,458$ (přesně)	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
R_∞	Rydbergova konstanta	$10\,973\,731,568\,160(21)$	$\mathrm{m^{-1}}$
e	elementární náboj	$1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ (přesně)	C
R	molární plynová konstanta	$8,314\,462\,618...$ (přesně)	$\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
σ	Stefanova-Boltzmannova konst.	$5,670\,374\,419... \cdot 10^{-8}$ (přesně)	$\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$

[5] Hodnota vychází z tíhového zrychlení na 45° zeměpisné šířky u hladiny moře.